Entscheidungstheorie

Dr. Andreas Tutić

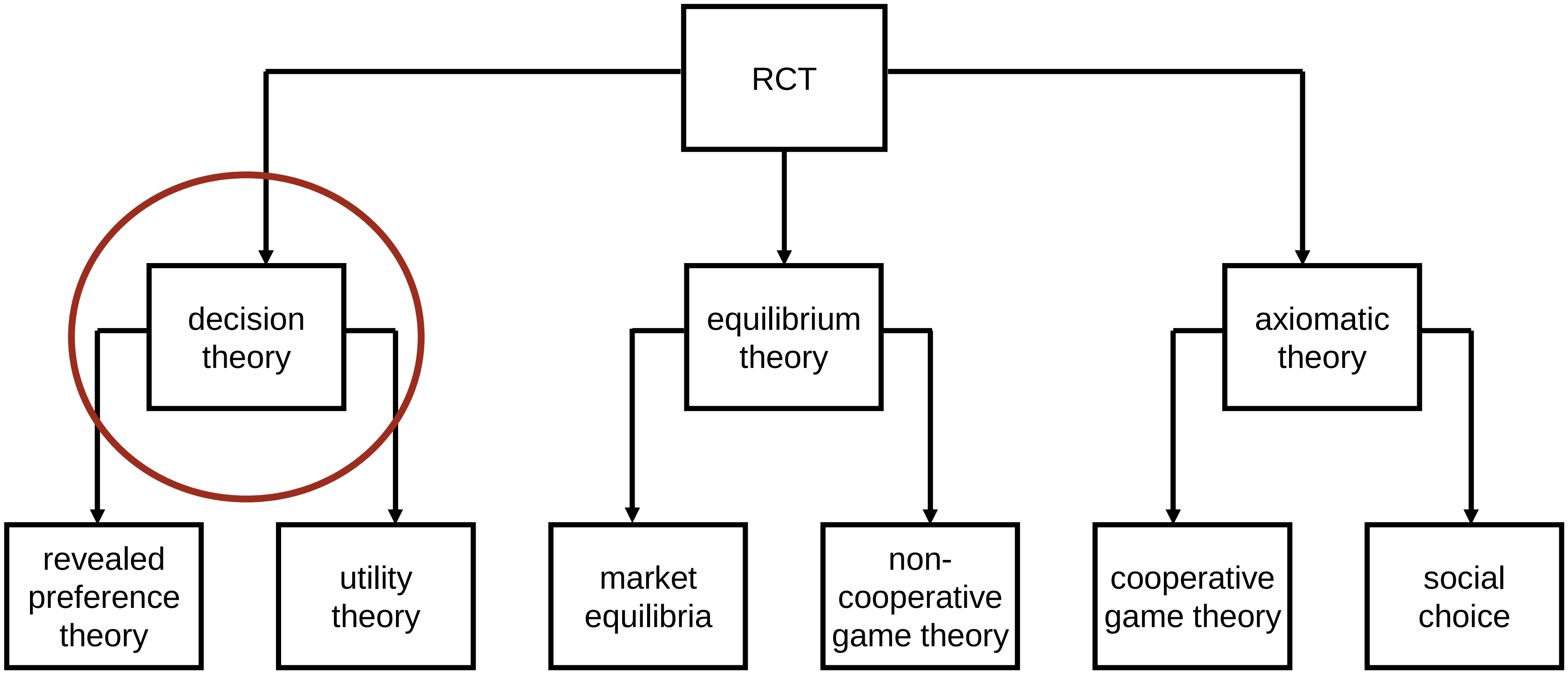
Theorien sozialen Handelns

Universität Bern

HS 2016

3 August 2015

Struktur der RCT



Entscheidungstheorie

- Präferenztheorie
- Theorie der offenbarten Präferenzen
- Ordinale Nutzentheorie
- Kardinale Nutzentheorie

Präferenztheorie

Definition 1 *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge geordneter Paare $R \subseteq X \times X$ heißt (binäre) Relation auf X. Man nennt R*

- *reflexiv, wenn für alle $x \in X$ gilt $(x, x) \in R$;*
- *symmetrisch, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$;*
- *asymmetrisch, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \implies (y, x) \notin R$;*
- *antisymmetrisch, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y$;*
- *transitiv, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$;*
- *vollständig, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.*

Präferenztheorie

Definition 2 $\succsim \subseteq X \times X$ *heißt (schwache) Präferenzrelation auf* X, *wenn* $\succsim$ *vollständig und transitiv ist. Ist* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X, *so nennt man* $\succ \subseteq X \times X$ *definiert mit* $(x, y) \in \succ :\iff [(x, y) \in \succsim \wedge (y, x) \notin \succsim]$ *strikte Präferenzrelation auf* X *und* $\sim := \succsim \setminus \succ$ *Indifferenzrelation auf* X.

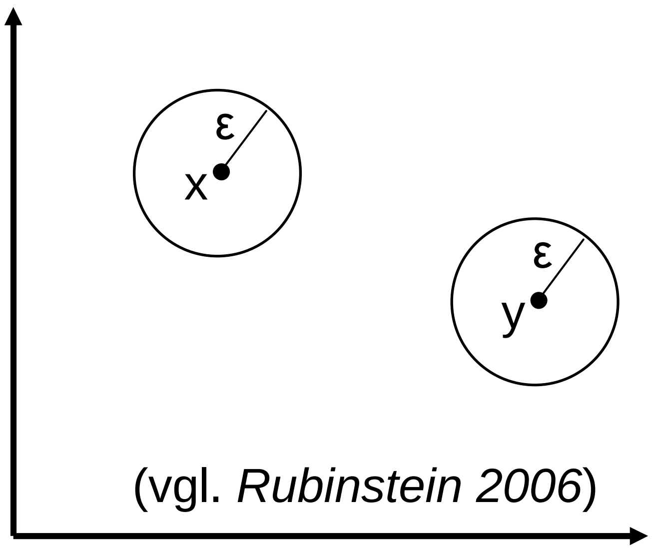
Satz 3 *Ist* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X, *dann gilt:*

- $\succ$ *ist asymmetrisch und transitiv.*
- $\sim$ *ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.*

Präferenztheorie

Stetigkeit von Präferenzrelationen, intuitiv

- Voraussetzung: Wir besitzen für X eine sinnige Vorstellung der Nähe bzw. Ähnlichkeit
- Eine Präferenzrelation ist stetig, wenn sie ähnliche Alternativen ähnlich bewertet



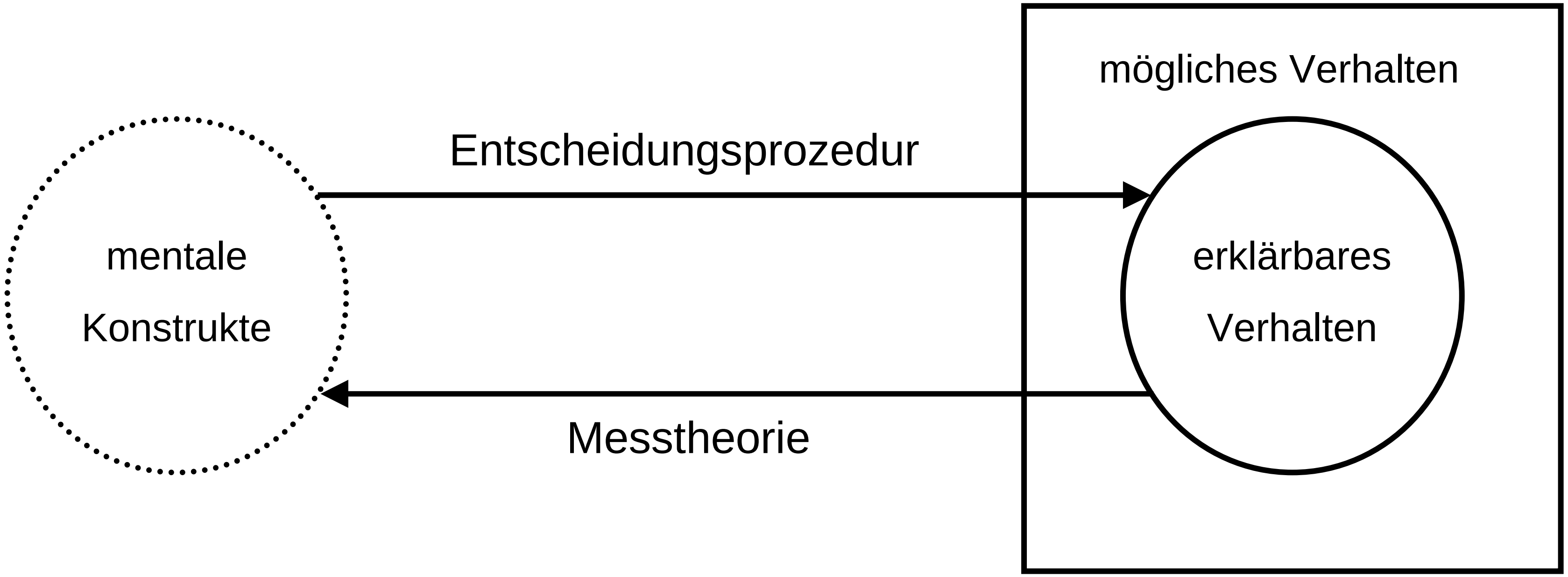
(vgl. *Rubinstein 2006*)

$x \succ y \Longrightarrow \exists \epsilon > 0$, so dass für alle $x' \in B_\epsilon(x)$ und $y' \in B_\epsilon(y)$ gilt $x' \succ y$

Theorie offenbarter Präferenzen

Forschungsfrage

Welche Art von beobachtbaren Handeln ist beschreibbar als die Maximierung einer Präferenzrelation?



Theorie offenbarter Präferenzen

Schwaches Axiom der offenbarten Präferenzen, SAOP. Für alle $x, y \in X$ gilt: Existiert ein $S \in \mathbb{X}$, so dass $x, y \in S$ und $x \in C(S) \not\ni y$, so existiert kein $T \in \mathbb{X}$, so dass $x \in T$ und $y \in C(T)$.

Satz 6 (Samuelson 1938) *Seien X eine endliche, nichtleere Menge und C eine Entscheidungsfunktion auf X. Es existiert genau dann eine Präferenzrelation auf X, so dass $C^{\succsim} = C$, wenn C die Eigenschaft* ***SAOP*** *aufweist.*

Ordinale Nutzentheorie

Forschungsfragen

Unter welchen Bedingungen lässt sich eine Präferenzrelation vermöge einer numerischen Funktion darstellen?

Welches Skalenniveau hat diese Darstellung im Allgemeinen?

Ordinale Nutzentheorie

Definition 7 *Sei* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X*. Eine Abbildung* $u : X \to \mathbb{R}$ *heißt Nutzenfunktion für* $\succsim$*, wenn für alle* $x, y \in X$ *gilt* $x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$.

Satz 8 *Seien* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X *und* u *eine Nutzenfunktion für* $\succsim$*. Sei ferner* $v : X \to \mathbb{R}$*.* v *ist genau dann Nutzenfunktion für* $\succsim$*, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung* $f : u(X) \to v(X)$ *gibt, so dass* $v = f \circ u$*.*

Satz 9 *Sei* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X*. Ist* X *endlich, dann existiert eine Nutzenfunktion für* $\succsim$*, die nur natürliche Zahlen als Werte annimmt.*

Ordinale Nutzentheorie

- Aufgrund des Skalenniveaus von Nutzenfunktionen sind viele Aussagen, die sich auf Nutzenwerte beziehen, bedeutungslos mit Blick auf das zugrundeliegende Entscheidungsverhalten
- Die Existenz von Nutzenfunktionen bei unendlich großen Mengen ist eine technisch komplizierte Frage
- Debreus Theorem (*Debreu 1954*) impliziert unter anderem, dass jede stetige Präferenzrelation auf einem euklidischen Raum eine stetige Nutzenfunktion besitzt

Kardinale Nutzentheorie

Forschungsfragen

Unter welchen Bedingungen lässt sich eine Präferenzrelation auf einer Menge von Lotterien vermöge einer Erwartungsnutzenfunktion darstellen?

Welche Art von Konsistenz muss Entscheidungsverhalten bei Unsicherheit aufweisen, so dass es sich mit der Vorstellung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten erklären lässt?

Kardinale Nutzentheorie

Es sei X eine nichtleere, endliche Menge mit der Interpretation, dass die Elemente von X die finalen Konsequenzen der Handlungen eines Akteurs sind.

Ferner sei $\mathcal{L}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf X. Die Elemente von $\mathcal{L}$ werden wir im Folgenden als Lotterien ansprechen, die Elemente von X als finale Konsequenzen.

Man beachte, dass wir $x \in X$ mit derjenigen Lotterie $l \in \mathcal{L}$ identifizieren können, welche $l(x) = 1$ und $l(x') = 0$ für alle $x' \in X, x' \neq x$ erfüllt.

Kardinale Nutzentheorie

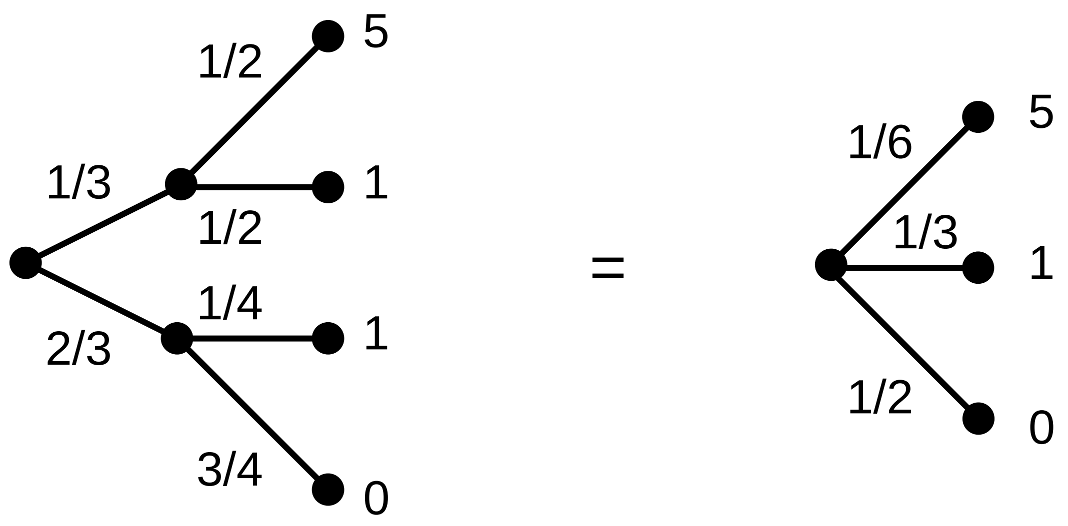
Unter welchen Bedingungen nimmt eine Nutzenfunktion $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, die $\succsim$ repräsentiert, die spezielle Form an, dass es eine Abbildung $u : X \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v(l) = \sum_{x \in X} l(x)\, u(x)$$

für alle $l \in \mathcal{L}$ gilt. Von einer Nutzenfunktion $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, die sich in der beschriebenen Art und Weise aus einer Nutzenfunktion $u : X \to \mathbb{R}$ ergibt, sagt man, dass sie die Erwartungsnutzeneigenschaft besitzt.

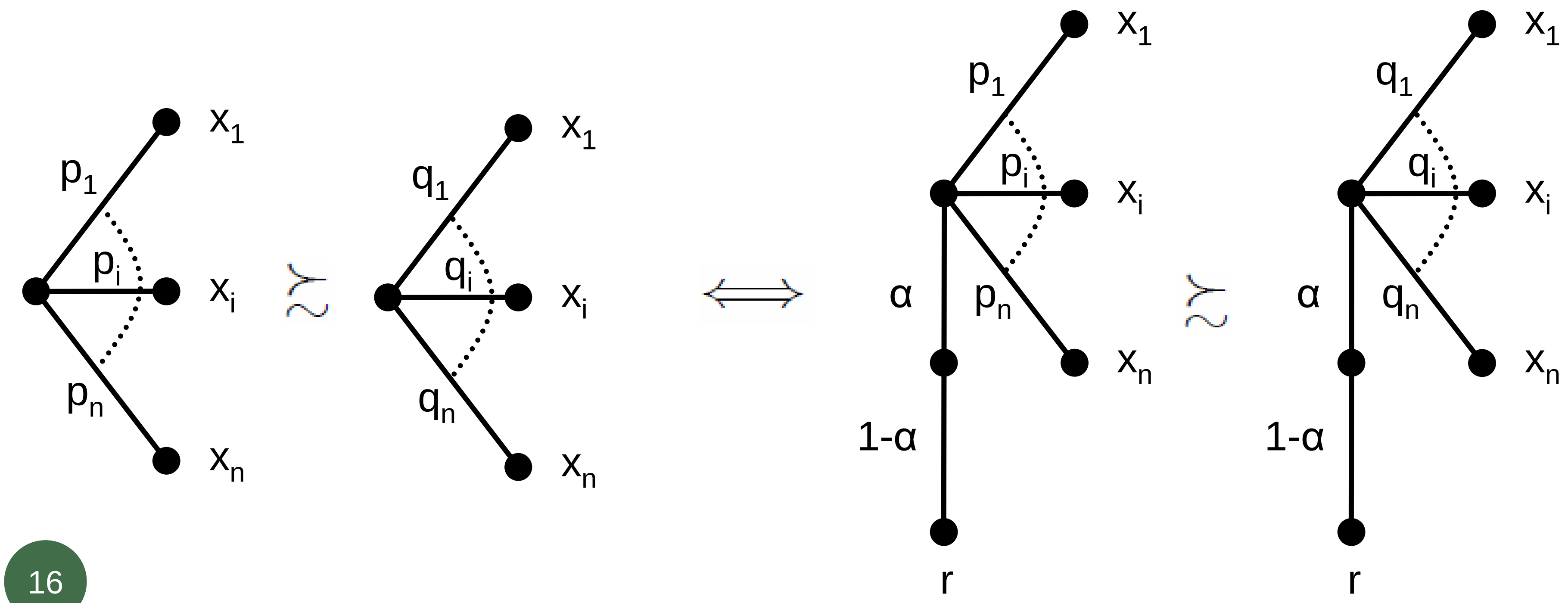
Kardinale Nutzentheorie

Sind $\alpha_1, \ldots, a_k \in [0,1]$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ sowie $l_1, \ldots, l_k \in \mathcal{L}$, so sei $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j l_j \in \mathcal{L}$ definiert durch $\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j l_j\right)(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j l_j(x)$ für alle $x \in X$. Man überprüft leicht, dass tatsächlich $\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j l_j\right) \in \mathcal{L}$ gilt.



Kardinale Nutzentheorie

Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen, UIA. Für alle $p, q, r \in \mathcal{L}$ und jedes $\alpha \in (0,1]$ gilt: $(p,q) \in \succsim \iff (\alpha p + (1-\alpha)\, r, \alpha q + (1-\alpha)\, r) \in \succsim$.



Kardinale Nutzentheorie

Satz 10 (Von Neumann 1944) *Eine stetige Präferenzrelation* $\succsim$ *auf* $\mathcal{L}$ *erfüllt genau dann* ***UIA****, wenn es eine Abbildung* $u : X \to \mathbb{R}$ *gibt, so dass für alle* $p, q \in \mathcal{L}$ *gilt:* $(p, q) \in \succsim \iff \sum_{x \in X} p(x) u(x) \geq \sum_{x \in X} q(x) u(x)$.

Beweisskizze

- Sei oBdA $x_1 \succsim \cdots \succsim x_n$ mit $x_1 \succ x_n$.
- Setze $u(x_1) = 1$ und $u(x_n) = 0$.
- Für jedes $i = 1, \ldots, n$ existiert ein eindeutiges $\alpha_i \in [0, 1]$, so dass $x_i \sim \alpha_i \cdot x_1 + (1 - \alpha_i) x_n$ (folgt aus der Stetigkeit von $\succsim$). Setze $u(x_i) = \alpha_i$.
- Seien nun $p, q \in \mathcal{L}$. Es ist $p \sim \sum_{i=1}^{n} p_i (\alpha_i \cdot x_1 + (1 - \alpha_i) x_n) = (\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \alpha_i) \cdot x_1 + (\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (1 - \alpha_i)) \cdot x_n$ (analog für q). Dabei folgt $\sim$ aus UIA und $=$ aus der Definition komplexer Lotterien.
- Wegen **UIA** gilt nun $p \succsim q \iff \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot \alpha_i$, q.e.d.

Kardinale Nutzentheorie

Satz 11 *Ist u eine VNM-Nutzenfunktion für $\succsim$ auf $\mathcal{L}$, wobei es $x, y \in X$ gibt, so dass $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \succ$, und $v : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so ist v genau dann eine VNM-Nutzenfunktion für $\succsim$ auf $\mathcal{L}$, wenn es eindeutig bestimmte Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$ gibt, so dass $v = \alpha + \beta u$.*

Bemerkung

- Eine VNM-Nutzenfunktion ist eindeutig bis auf positiv affine Transformationen
- Eine Erwartungsnutzenfunktion ist eindeutig bis auf positiv monotone Transformationen

Kardinale Nutzentheorie

- Dies ist die Erwartungsnutzentheorie bei Risiko, d.h. bei objektiv gegebenen Wahrscheinlichkeiten von Lotterien
- Die Annahme, dass die Menge der finalen Konsequenzen endlich ist, ist unnötig
- Der Beweis des Theorems liefert eine Messtheorie für Nutzen auf Intervallskalenniveau
- Es gibt auch vergleichbare Repräsentationstheoreme bei Unsicherheit. In diesem Fall erhält man auch eine Messtheorie für subjektive Wahrscheinlichkeiten gezeigt (*Savage 1954*)

Zusammenfassung

- Präferenzrelationen dienen zur Beschreibung des Entscheidungsverhaltens
- Mit der RCT lässt sich nur Verhalten abbilden, welches konsistent im Sinne von **SAOP** ist
- Nutzenfunktionen dienen zur Beschreibung des Entscheidungsverhaltens. Sie sind im Allgemeinen nicht eindeutig und müssen nicht existieren
- Genau dann, wenn Präferenzen auf Lotterien stetig sind und **UIA** erfüllen, kann man sie vermöge einer Erwartungsnutzenfunktion repräsentieren