Nutzen- und Spieltheorie

Andreas Tutić

Zusammenfassung: Nutzen- und Spieltheorie gehören zu den wichtigsten Handwerkszeugen der Rational-Choice-Theorie (RCT). In der ordinalen Nutzentheorie beschäftigt man sich mit der Frage, unter welchen Bedingungen numerische Repräsentationen von Präferenzrelationen bestehen. Präferenzrelationen sind hierbei eine elementare mathematische Struktur, die traditionell in der RCT dazu verwendet wird, individuelles Handeln zu modellieren. Es zeigt sich, dass die Frage, ob eine numerische Repräsentation individuellen Handelns existiert, in kritischer Weise von der Kardinalität der möglichen Handlungsalternativen abhängt. Ist diese Menge endlich, existiert stets eine solche Repräsentation. Ist diese Menge sehr groß, müssen weitere Voraussetzungen an das modellierte Verhalten gestellt werden, damit eine solche Repräsentation gefunden werden kann. In der kardinalen Nutzentheorie interessiert man sich nicht nur für die Frage, ob irgendeine numerische Repräsentation existiert, sondern man interessiert sich für besonders einfache Repräsentationen, die durch die Betrachtung von Entscheidungen bei Risiko bzw. Unsicherheit motiviert sind. In der nichtkooperativen Spieltheorie betrachtet man Situationen strategischer Interdependenz, an denen rationale Akteure beteiligt sind. Diese Theorie beruht in hohem Maße auf der Entscheidungs- und Nutzentheorie. Das zentrale Konzept der nichtkooperativen Spieltheorie sind sogenannte Lösungskonzepte, die spezielle Konfigurationen der Handlungen der beteiligten Akteure als besonders kennzeichnen. In Anwendungen der nichtkooperativen Spieltheorie können derartige spezielle Konfigurationen als Vorhersage dessen, was in einer sozialen Situation geschehen wird, verwendet werden. Die kooperative Spieltheorie beschäftigt sich mit der Charakterisierung von gewissen Verteilungsregeln. Derartige Regeln beschreiben zum Beispiel wie Allokationsprobleme auf vernünftige Art und Weise gelöst werden können. Die kooperative Spieltheorie kann deshalb in vielen Anwendungen im Sinne einer Sozialtechnologie eingesetzt werden. Darüberhinaus eignet sich die Theorie auch für die Erklärung und Vorhersage sozialer Phänomene.

1 Einleitung

In diesem Aufsatz werden die Grundzüge der Nutzentheorie erläutert und einige Grundideen der nichtkooperativen als auch der kooperativen Spieltheorie skizziert. Bei der Nutzentheorie geht es im Kern darum, die Bedingungen der Möglichkeit zu erörtern, eine sparsame Art der Beschreibung des Entscheidungsverhaltens von rationalen Akteuren durch numerische Repräsentationen zu konstruieren. Damit thematisiert die Nutzentheorie eine der grundlegendsten Fragen der Rational-Choice-Theorie (RCT) und spielt entsprechend in beinahe allen Anwendungen der RCT eine wichtige Rolle.

Die nichtkooperative Spieltheorie ist seit einigen Jahren diejenige Komponente der RCT, die sich bei Anwendern der größten Beliebtheit erfreut. In diesem Beitrag können nur einige der wichtigsten Konzepte der nichtkooperativen

Spieltheorie behandelt werden, um im Anschluss die typische Art der Erklärung eines sozialen Phänomens mithilfe dieser Theorie zu diskutieren.

Schließlich werden die Grundideen der kooperativen Spieltheorie anhand zweier Lösungskonzepte für sogenannte TU-Spiele, dem Kern und dem Shapley-Wert, erläutert. Von wenigen Ausnahmen abgesehen, wird die kooperative Spieltheorie im deutschen Sprachraum leider kaum rezipiert. Deshalb schließt dieser Beitrag mit einer knappen Skizze möglicher Anwendungsfelder dieser Theorie.

2 Nutzentheorie

Die Nutzentheorie beschäftigt sich mit der Frage, ob und wenn ja, wie genau sich die ökonomische Entscheidungstheorie mithilfe unserer Zahlbereiche sparsam darstellen lässt. Um überhaupt diese Frage und einige der Antworten darauf besser einschätzen zu können, müssen wir uns daher zunächst mit der zugrundliegenden Entscheidungstheorie beschäftigen. Sodann betrachten wir die sogenannte ordinale Nutzentheorie, welche für viele Zwecke, z.B. Spiele ohne gemischte Strategien oder neoklassische Haushaltstheorie, ausreicht, allerdings in einem gewissen Sinne unbefriedigend ist bei der Auseinandersetzung mit Entscheidungen bei Risiko oder Unsicherheit. Um damit umgehen zu können, haben verschiedene Autoren die sogenannte kardinale Nutzentheorie entwickelt, deren Grundideen wir uns dann auch zuwenden werden.

2.1 Ordinale Nutzentheorie

2.1.1 Präferenzen und Entscheidungen

Die Grundlage der tradierten RCT ist derjenige Teil der Entscheidungs- und Nutzentheorie, der auf dem Konzept der Präferenzrelationen gründet. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, welche wichtigen Eigenschaften derartige Relationen haben und welche Art von Verhalten sich damit überhaupt modellieren lässt.

Die RCT greift traditionell bei der Modellierung menschlichen Verhaltens auf das Konzept einer binären Relation zurück. Dies liegt nahe, denn eine Menge zusammen mit einer binären Relation sind eine der elementarsten mathematischen Strukturen. Intuitiv formuliert beschreibt eine binäre Relation, welche Elemente einer Menge in einer gewissen Beziehung zueinander stehen. Je nach Art der Beziehung kann eine Relation gewisse Eigenschaften aufweisen:

Definition 1 *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge geordneter Paare $R \subseteq X \times X$ heißt (binäre) Relation auf X. Man nennt R*

- *reflexiv, wenn für alle $x \in X$ gilt $(x, x) \in R$;*
- *symmetrisch, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$;*
- *asymmetrisch, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in R \implies (y, x) \notin R$;*

- *antisymmetrisch, wenn für alle* $x, y \in X$ *gilt* $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y$;

- *transitiv, wenn für alle* $x, y, z \in X$ *gilt* $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$;

- *vollständig, wenn für alle* $x, y \in X$ *gilt* $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Möchte man also Ausdrücken, dass zwei Elemente $x, y \in X$ in der von R modellierten Beziehung stehen, so legt man $(x, y) \in R$ fest. Gilt hingegen $(x, y) \notin R$, so stehen die Elemente x und y nicht in der von R beschriebenen Beziehung.

Im Kontext der Entscheidungs- und Nutzentheorie betrachtet man aus Gründen, die im Zuge der weiteren Darstellung noch deutlich werden, spezielle Relationen. Im Folgenden kann X stets als nichtleere Menge aller denkbaren Handlungsalternativen, mit denen sich ein Akteur in einer Entscheidungssituation konfrontiert sehen könnte, interpretiert werden.

Definition 2 $\succsim \subseteq X \times X$ *heißt (schwache) Präferenzrelation auf* X*, wenn* $\succsim$ *vollständig und transitiv ist. Ist* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X*, so nennt man* $\succ \subseteq X \times X$ *definiert mit* $(x, y) \in \succ :\iff [(x, y) \in \succsim \wedge (y, x) \notin \succsim]$ *strikte Präferenzrelation auf* X *und* $\sim := \succsim \setminus \succ$ *Indifferenzrelation auf* X.

Es gibt verschiedene Interpretationen für dieses Konzept. Früher wurde häufig geschrieben, $(x, y) \in \succ$ bedeute, dass der Akteur die Alternative x gegenüber der Alternative y vorziehe. Etwas moderner und weniger einschränkend ist die Formulierung, dass $(x, y) \in \succ$ zum Ausdruck bringt, dass der Akteur, wenn er nur die Wahl zwischen x und y hat, definitiv x wählt. Gerade im Kontext der Entscheidungs- und Nutzentheorie schreibt man häufig $x \succsim y$ anstatt $(x, y) \in \succsim$ (entsprechend für die Relationen $\succ$ und $\sim$).

Satz 3 *Ist* $\succsim$ *eine Präferenzrelation auf* X*, dann gilt:*

- $\succ$ *ist asymmetrisch und transitiv.*

- $\sim$ *ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.*

Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, nennt man auch Äquivalenzrelationen. Sind $x, y \in X, x \neq y$ äquivalent, so unterscheiden sie sich innerhalb der Struktur $(X, \succsim)$ nur ihrem Namen nach, hinsichtlich ihrer strukturellen Merkmale sind sie identisch. Für jedes $x \in X$ definieren wir die Äquivalenzklasse von x als $[x]_\sim := \{y \in X : (x, y) \in \sim\}$. Man überprüft nun problemlos, dass zum einen $X = \cup_{x \in X} [x]_\sim$ und zum anderen $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \varnothing \implies [x]_\sim = [y]_\sim$ für alle $x, y \in X$ gilt. Das bedeutet, dass jedes Element von X genau in einer Äquivalenzklasse liegt. Ferner induziert $\succsim$ eine lineare Ordnung $\geq$ auf der Menge der Äquivalenzklassen $I_\succsim := \{[x]_\sim : x \in X\}$ vermöge $[x]_\sim \geq [y]_\sim :\iff x \succsim y$. Die Linearität von $\geq$ auf $I_\succsim$ bedeutet, dass $\geq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Das Zeichen $\geq$ ist nicht ohne Bedacht gewählt. Zum Beispiel ist das gewöhnliche 'Größer-Gleich' ($\geq$) eine lineare

Ordnung auf den bekannten Zahlbereichen. Die Tatsache, dass jede Präferenzrelation eine lineare Ordnung auf ihren Äquivalenzklassen induziert, ist für die ordinale Nutzentheorie von entscheidender Bedeutung.

Inwiefern kann man nun das Verhalten eines Akteurs mithilfe einer Präferenzrelation beschreiben? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir zunächst ein formales Objekt einführen, das beobachtbares Verhalten möglichst direkt modelliert. Wie beschrieben, bezeichnet X die nichtleere Menge aller denkbaren Handlungsalternativen, mit denen sich ein Akteur in einer Entscheidungssituation konfrontiert sehen könnte. Eine konkrete Entscheidungssituation dieses Akteurs lässt sich dann sparsam als nichtleere Teilmenge $S \subseteq X$ modellieren. Die Menge aller dieser Entscheidungssituationen ist also $\mathbb{X} := 2^X \setminus \{\varnothing\}$. Das Verhalten eines Akteurs in allen möglichen Entscheidungssituationen lässt sich dann mithilfe einer Abbildung $C : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$, welche $\varnothing \neq C(S) \subseteq S$ für alle $S \in \mathbb{X}$ erfüllt, beschreiben. Eine solche Abbildung nennt man Entscheidungsfunktion auf X.

Arbeitet man mit Präferenzrelationen bei der Modellierung von Verhalten, so hat man natürlich die Vorstellung, dass ein Akteur in einer Entscheidungssituation $S \in \mathbb{X}$ eine Alternative wählt, die nicht schlechter ist als eine der anderen, verfügbaren Alternativen. Prima facie ist nicht klar, ob eine solche Alternative überhaupt existieren muss. Zum Beispiel ist die Relation $\geq$ auf den natürlichen Zahlen vollständig und transitiv, aber es gibt keine größte natürliche Zahl. Mit anderen Worten, ohne weitere Annahmen hinsichtlich X oder $\succsim$ muss nicht in jeder Entscheidungssituation eine 'rationale Handlung' existieren. Ohne unserem Modell weitere Struktur hinzuzufügen, können wir im Augenblick dieses Problem nur umgehen, wenn wir uns auf endliche Mengen von Entscheidungsalternativen beschränken:

Satz 4 *Ist X nichtleer und endlich und $\succsim$ eine Präferenzrelation auf X, dann enthält jedes $S \in \mathbb{X}$ ein maximales Element. Dieses ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.*

Ist X also endlich, dann induziert eine Präferenzrelation auf natürliche Weise eine Entscheidungsfunktion $C^{\succsim} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ mit $C^{\succsim}(S) := \{x \in S : x \succsim y, \forall y \in S\}$.

Es stellt sich nun die Frage, ob man in diesem Kontext mithilfe einer Präferenzrelation jedes denkbare Verhalten erklären kann. Technisch formuliert, interessieren wir uns dafür, ob man zu jeder vorgegebenen Entscheidungsfunktion C eine schwache Präferenzrelation $\succsim$ finden kann, so dass $C(S) = C^{\succsim}(S)$ für alle $S \in \mathbb{X}$ gilt.

Wie wir gleich sehen werden, kann man mit mithilfe von Präferenzrelationen nicht jedes Verhalten abbilden. Arbeitet man bei der Modellierung von Verhalten mit Präferenzrelationen, so beschäftigt man sich nur mit solchem Verhalten, das die folgende Eigenschaft aufweist:

Schwaches Axiom der offenbarten Präferenzen, SAOP. Für alle $x, y \in X$ gilt: Existiert ein $S \in \mathbb{X}$, so dass $x, y \in S$ und $x \in C(S) \not\ni y$, so existiert kein $T \in \mathbb{X}$, so dass $x \in T$ und $y \in C(T)$.

Das Axiom schließt aus, dass eine Alternative y, von der wir bereits wissen, dass sie 'schlecher' ist als Alternative x, gewählt wird, wenn auch Alternative x verfügbar ist. Es stellt sich nun heraus, dass gerade dasjenige Verhalten, welches diesem Axiom genügt, durch Präferenzrelationen beschrieben werden kann:

Satz 5 (Samuelson 1938) *Seien X eine endliche, nichtleere Menge und C eine Entscheidungsfunktion auf X. Es existiert genau dann eine Präferenzrelation auf X, so dass $C^{\succsim} = C$, wenn C die Eigenschaft* ***SAOP*** *aufweist.*

2.1.2 Ordinale Nutzenfunktionen

Im vorangehenden Abschnitt haben wir uns mit der Frage beschäftigt, was es auf der Ebene des Verhaltens bedeutet, wenn man bei der Modellierung auf Präferenzrelationen zurückgreift. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Umständen es möglich ist, die Präferenzrelation eines Akteurs durch eine Abbildung von X auf einen geeignet gewählten Zahlbereich zu beschreiben.

Das Wort 'Nutzen' ist aus dogmengeschichtlichen Gründen heraus ein Reizwort für viele Sozialwissenschaftler, die mit gewissen tradierten Varianten der RCT fremdeln. Wie die folgende Darstellung hoffentlich aufzeigt, involviert die moderne Nutzentheorie *keinerlei* Annahmen bezüglich der Motive der Akteure. Der harte Kern der RCT ist also nicht darin zu sehen, dass Akteure materielle Egoisten sind oder dergleichen. Er besteht vielmehr darin, individuelles Verhalten mithilfe von Präferenzrelationen und Nutzenfunktionen zu beschreiben. Die entscheidende inhaltliche Einschränkung, die diese Vorgehensweise mit sich bringt, ist, dass nur Verhalten, welches die Eigenschaft **SAOP** aufweist, mit diesen Methoden modelliert werden kann.

Das zentrale Konzept der Nutzentheorie ist natürlich der Begriff Nutzenfunktion:

Definition 6 *Sei $\succsim$ eine Präferenzrelation auf X. Eine Abbildung $u : X \to \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion für $\succsim$, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$.*

Die reellen Zahlen haben mit der $\geq$-Relation eine 'lineare Ordnung', d.h., die Relation $\geq$ ist vollständig, antisymmetrisch und transitiv. Sucht man nun nach einer Nutzenfunktion für eine Präferenzrelation auf einer Menge, dann bettet man gewissermaßen die Struktur $(X, \succsim)$ in die Struktur $(\mathbb{R}, \geq)$ ein.

Bevor wir der Frage nach der Existenz einer solchen Einbettung nachgehen, notieren wir kurz, was es zum Thema Eindeutigkeit zu sagen gibt:

Satz 7 *Seien $\succsim$ eine Präferenzrelation auf X und u eine Nutzenfunktion für $\succsim$. Sei ferner $v : X \to \mathbb{R}$. v ist genau dann Nutzenfunktion für $\succsim$, wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $f : u(X) \to v(X)$ gibt, so dass $v = f \circ u$.*

Inhaltlich besagt der Satz, dass zwei reelle Abbildungen auf X genau dann ein und diesselbe Präferenzrelation auf X repräsentieren, wenn sich die Nutzenwerte der einen Abbildung als streng monoton wachsende Funktion der Nutzenwerte der anderen Abbildung ergeben. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass unsere Präferenzrelation nur Auskunft darüber gibt, ob eine Alternative 'besser', 'schlechter' oder 'gleichgut' als bzw. wie eine andere Alternative ist, nicht darüber, *wieviel* 'besser' eine Alternative gegenüber einer anderen ist.

Hat eine Präferenzrelation $\succsim$ auf X eine Nutzenfunktion $u : X \to \mathbb{R}$, so ist es immer möglich, eine weitere Nutzenfunktion anzugeben, die den Wertebereich auf ein beliebig vorgegebenes Intervall $(a, b) \in \mathbb{R}, a < b$ einschränkt. Dies erreicht man beispielsweise dadurch, dass man die Nutzenfunktion $v = f \circ u$ wählt, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto a + \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}(b - a)$.[1]

Die Frage, ob zu einer Präferenzrelation $\succsim$ auf einer Menge X eine sie repräsentierende Nutzenfunktion existiert, ist im Allgemeinen schwieriger zu beantworten.

Als Vorüberlegung betrachten wir wiederum den Fall einer endlichen Menge X. Wir wissen bereits, dass es in jeder Teilmenge von X ein $\succsim$-maximales Element gibt. Also gibt es auch in X ein maximales Element, sagen wir x_1, ihm ordnen wir die Zahl 0 zu. Die Menge $X \setminus \{x_1\}$ enthält offenbar ein Element weniger als X. Auch $X \setminus \{x_1\}$ enthält ein maximales Element, sagen wir x_2. Nach Konstruktion gilt $x_1 \succsim x_2$. Gilt nun $x_1 \sim x_2$, so ordnen wir auch x_2 die Zahl 0 zu. Gilt hingegen $x_1 \succ x_2$, so ordnen wir x_2 die Zahl -1 zu. Haben wir allgemein bereits den ersten k mit $k \in \{1, \ldots, |X| - 1\}$ Elementen eine Zahl derart zugeordnet, dann ordnen wir einem maximalen Element x_{k+1} von $X \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ entweder die Zahl zu, die wir auch x_k zugeordnet haben (im Falle von $x_k \sim x_{k+1}$), oder wir ordnen x_{k+1} die nächst kleinere ganze Zahl zu (im Falle von $x_k \succ x_{k+1}$). Weil X endlich ist, haben wir nach $|X|$ Schritten jedem Element von X eine ganze Zahl zugeordnet. Offenbar haben wir eine Nutzenfunktion $u : X \to \mathbb{Z}$ für $\succsim$ gefunden. Addieren wir schließlich eine geeignet große natürliche Zahl zu all diesen 'Nutzenwerten' hinzu, erhalten wir

Satz 8 *Sei $\succsim$ eine Präferenzrelation auf X. Ist X endlich, dann existiert eine Nutzenfunktion für $\succsim$, die nur natürliche Zahlen als Werte annimmt.*

Der Fall endlicher Mengen X ist also leicht handhabbar. In vielen Anwendungen jedoch, gerade in der Mikroökonomik, arbeitet man mit Präferenzrelationen auf dem $\mathbb{R}^n$, also Räumen, die nicht endlich sind. In der Spieltheorie kommen wir spätestens bei der Betrachtung von gemischten Strategien mit diesen einfachen Überlegungen nicht mehr aus. Glücklicherweise haben sich hervorragende Mathematiker einige Gedanken über diese Existenz von Nutzenfunktionen gemacht. Für hauptsächlich an Anwendungen interessierte Sozialwissenschaftler sind die Details dieser Überlegungen wohl eher uninteressant. Dennoch möchten wir das Hauptergebnis dieser Grundlagenforschung hier präsentieren:

Satz 9 (Debreu 1954) *Sei $\succsim$ eine Präferenzrelation auf einem metrischen Raum X. Existiert eine abzählbare Menge $S \subseteq X$, so dass jede nichtleere, offene Teilmenge von X ein Element aus S enthält, und ist $\succsim$ stetig, dann existiert eine (stetige) Nutzenfunktion.*

[1] $\frac{\exp(\cdot)}{1+\exp(\cdot)}$ ist streng monoton wachsend und nimmt nur Werte im offenen Einheitsintervall an.

Das ist sicherlich der tiefste Satz, dem wir bisher begegnet sind. Das zeigt sich schon darin, dass die darin enthaltenen Begriffe ‘metrischer Raum’ und ‘stetige Relation’ in diesem Beitrag nicht formal eingeführt werden können. Intuitiv kann man sich aber unter einem metrischen Raum eine Menge vorstellen, auf der wir eine präzise Vorstellung der Nähe bzw. der Ähnlichkeit (d.h. eine Metrik) besitzen. Eine Präferenzrelation ist nun stetig, wenn sie diese Metrik respektiert, d.h., wenn sie ähnliche Elemente des metrischen Raumes ähnlich ‘bewertet’.

Beschränkt man sich auf stetige Präferenzrelationen deckt dieser Satz tatsächlich die wichtigsten Anwendungsfälle ab. In der Mikroökonomik betrachtet man beispielsweise häufig den $\mathbb{R}^n$, in dem die abzählbare Menge $\mathbb{Q}^n$ dicht liegt. Mit Debreus Theorem können wir unsere Einführung in die ordinale Nutzentheorie abschließen. Das Wort ‘ordinal’ bezieht sich hierbei auf das Skalenniveau der Nutzenfunktionen, die wir betrachtet haben (vgl. Satz 7). Der nächste Abschnitt zeigt, dass wir bei der Betrachtung von Präferenzen auf Lotterien schnell auf Nutzenfunktionen geführt werden, welche ein höheres Skalenniveau besitzen.

2.2 Kardinale Nutzentheorie

Bisher haben wir mit einer Menge an Handlungsalternativen X gearbeitet, die keine innere Struktur derart aufgewiesen hat, dass es eine ‘fokale’ Teilmenge $Y \subseteq X$ grundlegender Alternativen gegeben hätte, aus denen sich die anderen Alternativen $X \backslash Y$ in einem gewissen Sinne ‘zusammensetzen’. Wäre eine solche Konstellation gegeben, dann erschiene es wohl intuitiv eingängig, dass sich die Präferenzen der Akteure hinsichtlich der abgeleiteten Alternativen $X \backslash Y$ aus den Präferenzen über die grundlegenden Alternativen Y bestimmen.

In der Tat ist die Standardtheorie bei der Betrachtung von Entscheidungen bei Risiko und Unsicherheit von der zuletzt angedeuteten Vorstellung motiviert. In diesem Abschnitt sei X eine nichtleere, endliche Menge mit der Interpretation, dass die Elemente von X die finalen Konsequenzen der Handlungen eines Akteurs sind. Ferner sei $\mathcal{L}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf X. Eine Entscheidungssituation eines Akteurs ist nun nicht mehr eine Teilmenge von X, sondern eine Teilmenge von $\mathcal{L}$. Die Idee dabei ist, dass der Entscheider auch Handlungen wählen kann, die nicht mit Sicherheit zu einer finalen Konsequenz $x \in X$ führen, sondern mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zu gewissen finalen Konsequenzen, es also bei der Auswahl einer Handlung $l \in \mathcal{L}$ ein Moment der Unsicherheit hinsichtlich ihrer tatsächlichen Konsequenz geben kann. Die Elemente von $\mathcal{L}$ werden wir im Folgenden als Lotterien ansprechen, die Elemente von X als finale Konsequenzen. Man beachte, dass wir $x \in X$ mit derjenigen Lotterie $l \in \mathcal{L}$ identifizieren können, welche $l(x) = 1$ und $l(x') = 0$ für alle $x' \in X, x' \neq x$ erfüllt.

Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen eine Nutzenfunktion existiert, die eine gegebene Präferenzrelation $\succsim$ auf $\mathcal{L}$ repräsentiert. Die ordinale Nutzentheorie hat hierauf zwar eine Antwort, allerdings entspricht diese nicht dem oben angedeuteten Gedanken, dass sich die Präferenzen auf zusammengesetzten Alternativen $\mathcal{L}$ aus den Präferenzen über grundlegenden Alternativen X ableiten. Denn Debreus Theorem ist auf unser Problem anwendbar, d.h., es gibt eine stetige Nutzenfunktion $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, die $\succsim$ repräsentiert. Diese Repräsentation muss allerdings nicht unbedingt der Tatsache Rechnung tragen, dass die Elemente von X grundlegender sind als die Elemente von $\mathcal{L}$. Deshalb interessiert man sich in der kardinalen Nutzentheorie für die folgende Frage: Unter welchen Bedingungen nimmt eine Nutzenfunktion $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, die $\succsim$ repräsentiert, die spezielle Form an, dass es eine Abbildung $u : X \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $v(l) = \sum_{x \in X} l(x) u(x)$ für alle $l \in \mathcal{L}$ gilt. Von einer Nutzenfunktion $v : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, die sich in der beschriebenen Art und Weise aus einer Nutzenfunktion $u : X \to \mathbb{R}$ ergibt, sagt man, dass sie die Erwartungsnutzeneigenschaft besitzt.

Um die Frage zu beantworten, unter welchen Bedingungen eine stetige Präferenzrelation $\succsim$ auf $\mathcal{L}$ eine Nutzenfunktion besitzt, welche die Erwartungsnutzeneigenschaft aufweist, müssen wir ein weiteres Konzept einführen. Sind $\alpha_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $l_1, \ldots, l_k \in \mathcal{L}$, so sei $\sum_{j=1}^k \alpha_j l_j \in \mathcal{L}$ definiert durch $\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j l_j\right)(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j l_j(x)$ für alle $x \in X$. Man überprüft leicht, dass tatsächlich $\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j l_j\right) \in \mathcal{L}$ gilt.

Es wird sich zeigen, dass eine Präferenzrelation auf $\mathcal{L}$ neben der Stetigkeit noch die folgende Eigenschaft aufweisen muss, damit sie eine Nutzenfunktion besitzt, welche die Erwartungsnutzeneigenschaft hat:

Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen, UIA. Für alle $p, q, r \in \mathcal{L}$ und jedes $\alpha \in (0, 1]$ gilt: $(p, q) \in \succsim \iff (\alpha p + (1 - \alpha) r, \alpha q + (1 - \alpha) r) \in \succsim$.

Die Interpretation dieser Eigenschaft ist einfach: Die beiden Lotterien $\alpha p + (1 - \alpha) r$ und $\alpha q + (1 - \alpha) r$ unterscheiden sich nur in der 'Komponente' p bzw. q. Also sollte die Präferenz des Entscheiders zwischen p und q der Präferenz zwischen den Lotterien $\alpha p + (1 - \alpha) r$ und $\alpha q + (1 - \alpha) r$ gleichen.

Als unmittelbare Folge von **UIA** erhalten wir das folgende intuitive Lemma:

Hilfssatz 10 *Sind $p, q \in \mathcal{L}$ und gilt $(p, q) \in \succ$, dann gilt für alle $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $\alpha > \beta$, dass $(\alpha p + (1 - \alpha) q, \beta p + (1 - \beta) q) \in \succ$.*

Es ist ferner hilfreich, sich eine interessante Konsequenz der Stetigkeit von $\succsim$ auf $\mathcal{L}$ zu vergegenwärtigen. Liegt eine Lotterie r präferenzmäßig zwischen einer guten Lotterie p und einer schlechten Lotterie q, so gibt es eine Mischung zwischen p und q, die indifferent ist zu r.

Hilfssatz 11 *Sind $p, q, r \in \mathcal{L}$ und gilt $(p, q) \in \succ$, $(p, r) \in \succsim$ und $(r, q) \in \succsim$, existiert ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in [0, 1]$, so dass $(r, \alpha p + (1 - \alpha) q) \in \sim$.*

Wir sind nun in der Lage, dass sogenannte Von-Neumann-Morgenstern-Theorem zu formulieren und auch den Beweis zu skizzieren: Die Grundidee dabei ist es, dass man jede Konsequenz vermöge Hilfssatz 11 als eindeutige Mischung der besten und der schlechtesten Konsequenz ausdrücken kann. Somit lassen sich komplexe Lotterien auf Lotterien reduzieren, die nur der besten und der schlechtesten Konsequenz eine positive Wahrscheinlichkeit zusprechen. Mit Hilfssatz 10 ergibt sich dann, dass die Präferenz zwischen Lotterien nur durch diejenige Wahrscheinlichkeit, die nach der beschriebenen Substitution der besten Konsequenz zugeschrieben wird, bestimmt ist.

Satz 12 (von Neumann und Morgenstern 1944) *Eine stetige Präferenzrelation* $\succsim$ *auf* $\mathcal{L}$ *erfüllt genau dann* ***UIA****, wenn es eine Abbildung* $u : X \to \mathbb{R}$ *gibt, so dass für alle* $p, q \in \mathcal{L}$ *gilt:* $(p,q) \in \succsim \iff \sum_{x \in X} p(x)\,u(x) \geq \sum_{x \in X} q(x)\,u(x)$.

Ist $\succsim$ eine stetige Präferenzrelation auf $\mathcal{L}$ und $u : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $(p,q) \in \succsim \iff \sum_{x \in X} p(x)\,u(x) \geq \sum_{x \in X} q(x)\,u(x)$ für alle $p, q \in \mathcal{L}$, so nennt man u eine Von-Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion (VNM-Nutzenfunktion) für $\succsim$ auf $\mathcal{L}$.

Satz 13 *Ist* u *eine VNM-Nutzenfunktion für* $\succsim$ *auf* $\mathcal{L}$*, wobei es* $x, y \in X$ *gibt, so dass* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \succ$*, und* $v : X \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung, so ist* v *genau dann eine VNM-Nutzenfunktion für* $\succsim$ *auf* $\mathcal{L}$*, wenn es eindeutig bestimmte Konstanten* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit* $\beta > 0$ *gibt, so dass* $v = \alpha + \beta u$.

Eine VNM-Nutzenfunktion ist also eindeutig bis auf positiv-affine Transformationen. Der Leser beachte, dass die Nutzenfunktion eines Entscheiders *auf Lotterien* (d.h. auf $\mathcal{L}$), auch wenn sie die Erwartungsnutzeneigenschaft aufweist, eindeutig bis auf monoton wachsende Transformationen ist (vgl. Satz 7). Eine VNM-Nutzenfunktion auf Konsequenzen, welche eindeutig bis auf positiv-affine Transformationen ist, induziert also eine Nutzenfunktion auf Lotterien, welche eindeutig bis auf monoton wachsende Transformationen ist.

Man kann das von Von-Neumann-Morgenstern-Theorem (Satz 12) auch auf den Fall einer nichtendlichen Menge von Konsequenzen verallgemeinern (vgl. Kreps 1988). Ferner führt die Betrachtung von Lotterien auf natürliche Art und Weise zur Frage, ob sich auch das Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf beobachtbaren Handlungen fundieren lässt. In diesem Abschnitt haben wir Lotterien betrachtet, bei denen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Konsequenzen 'objektiv' bekannt waren, wie zum Beispiel beim Roulette. Viele Entscheidungen werden allerdings in Situationen getroffen, in denen die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse nicht im Sinne einer frequentistischen Perspektive objektiv gegeben sind, beispielsweise beim Wetten auf den Ausgang von Pferderennen. Bei der theoretischen Aufarbeitung dieser Fragen haben sich vor allem zwei Autoren hohe Verdienste erworben. Schon früh hat de Finetti (1931) ein zu Satz 12 sozusagen duales Theorem bewiesen. De Finetti betrachtet Lotterien mit objektiv nicht gegebenen Wahrscheinlichkeiten und Geldauszahlungen. Er geht davon aus, dass ein Entscheider seine erwartete Auszahlung maximieren möchte, und fragt sich, welche Art von Konsistenz des Entscheidungsverhaltens gerade charakteristisch ist dafür, dass man sinnvoll davon sprechen kann, dass der Entscheider subjektive Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse ausgebildet hat. De Finettis Theorem ist in dem Sinne dual zum Von-Neumann-Morgenstern-Theorem, als dass bei De Finetti die Präferenzen auf den Konsequenzen fixiert sind und die Frage nach der Messbarkeit von subjektiven Wahrscheinlichkeiten erörtert wird, während bei Von Neumann und Morgenstern die Wahrscheinlichkeiten bekannt sind und die Frage nach der Messbarkeit von subjektiven Präferenzen auf Konsequenzen diskutiert wird.

Den Höhepunkt der klassischen Entscheidungstheorie bei Risiko bzw. Unsicherheit stellt Leonard Savage (1954) Monographie 'The Foundation of Statistics' dar. Darin formuliert und beweist Savage einen Satz, der notwendige und hinreichende Bedingungen an die Konsistenz von Entscheidungsverhalten bei Lotterien angibt, welche gerade dann erfüllt sind, wenn sich der Entscheider so verhält, als hätte er subjektive Präferenzen (im Sinne einer VNM-Nutzenfunktion) auf Konsequenzen und subjektive Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse ausgebildet und würde seinen subjektiven Erwartungsnutzen maximieren. Savage Beitrag ist mathematisch derart involviert, dass es leider weder im deutsch- noch im englischsprachigen Raum eine für breitere Kreise nachvollziehbare und trotzdem einigermaßen vollständige Darstellung davon gibt. Für einen Einstieg sei der Leser auf die Lehrbücher von Kreps (1988) und Wakker (2010) verwiesen. Wakkers Lehrbuch enthält darüberhinaus didaktisch gut ausgearbeitete Darstellungen von neueren Entscheidungstheorien, wie etwa der rank-dependent expected utility theory oder auch der prospect theory.

3 Spieltheorie

Wir wenden uns nun der Spieltheorie zu. Tatsächlich gibt es nicht eine, sondern zwei Spieltheorien: Die nichtkooperative Spieltheorie, welche sich mit der Analyse von Situationen der strategischen Interdependenz beschäftigt, und die kooperative Spieltheorie, welche sich um die Charakterisierung von 'Verteilungsregeln' bemüht. Es hat lediglich historische Gründe, warum zwei sehr unterschiedliche Theorien mit demselben Begriff bezeichnet werden.

Wir beginnen mit der Darstellung der nichtkooperativen Spieltheorie, weil diese im Unterschied zur kooperativen Spieltheorie im hohen Maße auf der so eben skizzierten Nutzentheorie aufbaut.

3.1 Nichtkooperative Spieltheorie

In der nichtkooperativen Spieltheorie untersucht man Situationen der strategischen Interdependenz. Dabei gibt es zwei grundlegende Formen von Spielen: Spiele in strategischer Form und Spiele in extensiver Form. Wir werden im Folgenden die grundlegenden Konzepte für beide Formen kennenlernen. Anschließend diskutieren wir typische Anwendungen der nichtkooperativen Spieltheorie in den Sozialwissenschaften.

3.1.1 *Spiele in strategischer Form*

Definition 14 *Ein Spiel in strategischer Form ist ein Tripel* $\left(N, (S_n)_{n\in N}, (\succsim_n)_{n\in N}\right)$, *wobei*

- N *eine nichtleere Menge, die Spielermenge,*
- S_n *eine nichtleere Menge, die Strategiemenge von Spieler* $n \in N$, *und*

- $\succsim_n$ *eine Präferenzrelation auf* $S := \times_{n\in N} S_n$*, die Präferenzrelation von Spieler* $n \in N$ *auf der Menge der Strategieprofile* S*.*

Häufig ersetzt man die Komponente $(\succsim_n)_{n\in N}$ durch ein N-Tupel an Nutzenfunktionen $(u_n)_{n\in N}$, wobei natürlich $u_n : S \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion für Spieler $n \in N$ auf der Menge der Strategieprofile ist. In diesem Falle nennt man die Zahlen, welche u_n animmt, die Auszahlungen von Spieler n. Anstelle von $\left(N, (S_n)_{n\in N}, (\succsim_n)_{n\in N}\right)$ bzw. $\left(N, (S_n)_{n\in N}, (u_n)_{n\in N}\right)$ schreibt man auch kürzer $(N, S, \succsim)$ bzw. (N, S, u).

Das Konzept eines Spiels in strategischer Form ist eine sehr allgemeines Modell für Situationen strategischer Interdependenz, an denen rationale Akteure beteiligt sind. Die Interdependenz zeigt sich darin, dass die Spieler Präferenzen auf der Menge der Strategieprofile haben, aber nur begrenzten Einfluss darauf, welches Strategieprofil tatsächlich zustande kommt. Wir betrachten zwei Beispiele für Spiele in strategischer Form:

Beispiel 15 *Chicken game, CG: Seien* $N = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = \{c, d\}$ *und* u_1 *sowie.* u_2 *durch die folgende Matrix beschrieben*

	c	d
c	$3,3$	$1,4$
d	$4,1$	$0,0$

,

wobei die Zeilen die Strategien von Spieler 1 sind, die Spalten die Strategien von Spieler 2 sowie die linke Zahl in jeder Zelle der Nutzenwert von Spieler 1 und die rechte Zahl in jeder Zelle der Nutzenwert von Spieler 2.

Das Chicken game ist ein elementares Modell für Konfliktsituationen, in denen es jedem Spieler am liebsten ist, dass der andere aufgibt (c wählt) und man selbst auf seiner Position beharrt (d wählt), es den Spielern am zweitliebsten ist, wenn beide aufgeben, und der tatsächliche Konflikt für beide das schlechteste aller möglichen Ergebnisse ist. Man denke etwa an die Cubakrise oder, weniger dramatisch, an die Frage, wer in einer Wohngemeinschaft für den Abwasch verantwortlich ist.

Unser zweites Beispiel lässt sich u.a. auf den Kampf um die sprichwörtliche politische Mitte anwenden.

Beispiel 16 *Hotelling game, HG (vgl. Hotelling 1929): Seien* $N = \{1, 2\}, S_1 = S_2 = [0, 1]$ *und*

$$\begin{aligned} u_1(s_1, s_2) &= \begin{cases} 1 - \frac{s_1+s_2}{2}, & s_1 \geq s_2, \\ \frac{s_1+s_2}{2}, & s_1 < s_2, \end{cases} \quad \textit{und} \\ u_2(s_1, s_2) &= 1 - u_1(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Die Situation lässt sich graphisch mithilfe der Einheitsstrecke veranschaulichen:

$$0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\frac{1}{2}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_1$$

Beide Spieler wählen simultan ihren Standort auf der Einheitsstrecke. Jeder Punkt auf der Wegstrecke gehört demjenigen Spieler, der näher an dem Punkt positioniert ist. Sind beide Spieler gleich nahe, gehört jedem Spieler der Punkt zur Hälfte. Jeder Spieler will möglichst viele Punkte vereinnahmen.

In der Anwendung auf den politischen Wahlkampf sind die Wähler die Punkte, welche diejenige Partei wählen, die ihrer Position im politischen Links-Rechts-Spektrum am nächsten steht.

Nash-Gleichgewichte

Die zentrale Frage der nichtkooperativen Spieltheorie ist nun, was sich über Situationen, wie sie etwa durch das CG oder durch das HG modelliert werden, sagen lässt. In der nichtkooperativen Spieltheorie wird diese Frage anhand sogenannter Lösungskonzepte, wie etwa dem Nash-Gleichgewicht, diskutiert. Dabei können wir uns unter einem Lösungskonzept eine Art Operator vorstellen, der jedem Spiel aus einer Teilklasse an Spielen in strategischer Form eines oder mehrere seiner Strategieprofile zuordnet. Um das Nash-Gleichgewicht einführen zu können, ist es nützlich, den Begriff der besten Antwort zur Verfügung zu haben.

Definition 17 *Seien $(N, S, \succsim)$ ein Spiel in strategischer Form, $n \in N$ und $s_{-n} \in S_{-n} := \times_{m \in N \setminus \{n\}} S_m$. $s_n \in S_n$ heißt beste Antwort auf s_{-n}, wenn $(s_n, s_{-n}) \succsim_n (s'_n, s_{-n})$ für alle $s'_n \in S_n$.*

Ein Nash-Gleichgewicht liegt nun genau dann vor, wenn jeder Spieler bei gegebener Strategiewahl der Mitspieler eine beste Antwort gibt.

Definition 18 *Ein Strategieprofil $s \in S$ in einem Spiel in strategischer Form heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für alle $n \in N$ gilt, dass s_n eine beste Antwort auf s_{-n} ist.*

Man überprüft leicht (indem man z.B. jede der vier Strategieprofile einzeln prüft), dass es im CG zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (c, d) und (d, c) gibt. Interessanter ist die Situation im HG. Wir überlegen uns zunächst, dass ein Strategieprofil, in dem nicht beide $1/2$ wählen, kein Nash-Gleichgewicht sein kann. Denn dann könnte sich ein Spieler ein winziges Stückchen mehr zur Mitte, ausgehend von der Position des anderen Spielers positionieren, und so seine Auszahlung vergrößern. Damit bleibt nur ein Kandidat für ein Nash-Gleichgewicht übrig, nämlich beide Spieler positionieren sich bei $1/2$. Man sieht leicht, dass es sich hierbei um ein Nash-Gleichgewicht handelt.

Das Nash-Gleichgewicht schließt diejenigen Strategieprofile in einem Spiel aus, die inhärent instabil sind. Ist $s = (s_n)_{n \in N} \in S$ kein Nash-Gleichgewicht von $(N, S, \succsim)$, dann gibt es zumindest einen Spieler $n \in N$ der, wenn er wüsste, dass s der Fall ist, nicht seinen Part s_n spielen möchte. Man kann also sagen, dass Nash-Gleichgewichte durch ein Mindestmaß an Stabilität ausgezeichnet sind. Es ist wichtig, sich vor Augen zu führen, dass man auf Grundlage dieser Stabilitätseigenschaft nicht ohne Weiteres auf ein hohes prädiktives Potential des Nash-Gleichgewichts schließen kann. Lassen wir beispielsweise zwei Versuchspersonen *einmalig* das CG im Labor spielen, gibt es keinen Grund dafür anzunehmen, dass ihre Strategien ein Nash-Gleichgewicht bilden.

Gemischte Strategien

Es gibt viele Spiele in strategischer Form, die kein Nash-Gleichgewicht besitzen. Aus diesem Grund haben die Spieltheoretiker das Konzept der gemischten Erweiterung eines Spiels eingeführt.

Definition 19 *Sei (N, S, u) ein endliches Spiel in strategischer Form, d.h. ein Spiel in strategischer Form, in dem es endlich viele Spieler gibt und jeder Spieler nur endlich viele Strategien hat. Dann ist $\left(N, (\Delta(S_n))_{n \in N}, (Eu_n)_{n \in N}\right)$ die gemischte Erweiterung von (N, S, u), wobei*

- $\Delta(S) := \times_{n \in N} \Delta(S_n)$, die Menge der gemischten Strategieprofile, wobei $\Delta(S_n) := \left\{\delta_n : S_n \to [0,1] \text{ s.d. } \sum_{s \in S_n} \delta_n(s) = 1\right\}$, die Menge der gemischten Strategien von Spieler $n \in N$,

- $Eu_n : \Delta(S) \to \mathbb{R}$ mit $Eu_n(\delta) := \sum_{s \in S} \left(\prod_{n \in N} \delta_n(s_n)\right) u_n(s)$ für alle $\delta \in \Delta(S)$.

Die gemischte Erweiterung eines Spiels unterscheidet sich demnach in zweierlei Hinsicht von dem zugrundeliegenden Spiel: Erstens darf jeder Spieler $n \in N$ nicht nur Strategien $s \in S_n$ wählen, sondern er darf zwischen seinen reinen Strategien (d.h. S_n) randomisieren, d.h., er darf eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\delta_n \in \Delta(S_n)$ wählen. Da das zugrundeliegende Spiel nur Informationen über die Präferenzen der Spieler auf $S = \times_{n \in N} S_n$ enthält, muss man sich noch zweitens überlegen, wie man die Nutzenfunktionen u_n für $n \in N$ auf $\Delta(S) = \times_{n \in N} \Delta(S_n)$ erweitert. Man behilft sich mit dem Erwartungsnutzen Eu_n für $n \in N$. Das bedeutet aber auch, dass es für ein Spiel $(N, S, \succsim)$ nicht eine eindeutig bestimmte gemischte Erweiterung gibt. Denn für jedes $\succsim_n$ mit $n \in N$ haben wir einen großen Spielraum (vgl. Satz 7) bzgl. u_n. Deshalb haben wir das Konzept der gemischten Erweiterung nur für Spiele (N, S, u) erklärt, wobei wir dann davon ausgehen, dass u_n für jedes $n \in N$ eine VNM-Nutzenfunktion auf S ist.

Der Sinn dieser Konstruktion erschließt sich nun in folgender Definition.

Definition 20 *Ein gemischtes Strategieprofil $\delta \in \Delta(S)$ heißt gemischtes Nash-Gleichgewicht in einem Spiel in strategischer Form (N, S, u), wenn δ ein Nash-Gleichgewicht in $(N, \Delta(S), Eu)$ ist.*

Diese Definition wirkt auf den ersten Blick etwas kompliziert. Tatsächlich ist die Bestimmung von gemischten Nash-Gleichgewichten nicht so schwer, wenn man sich eine wichtige Eigenschaft des Erwartungsnutzens klar gemacht hat.

Satz 21 *Sei (N, S, u) ein endliches Spiel in strategischer Form. Für jedes $n \in N$ und $s \in S_n$ sei $\mathbf{s} \in \Delta(S_n)$ definiert durch $\mathbf{s}(s) = 1$ und $\mathbf{s}(t) = 0$ für alle*

$t \in S_n \setminus \{s\}$. Dann gilt für jedes $\delta \in \Delta(S)$ und jedes $n \in N$:

$$Eu_n(\delta_n, \delta_{-n}) = \sum_{s_n \in S_n} \delta_n(s_n)\, Eu_n(\mathbf{s}_n, \delta_{-n}).$$

Der Satz besagt Folgendes: Sei $\delta_{-n} \in \Delta_{-n}(S)$ ein Profil gemischter Strategien der Spieler $m \in N, m \neq n$ und $n \in N$. Der Erwartungsnutzen der gemischten Strategie $\delta_n \in \Delta(S_n)$ bestimmt sich als gewichtete Summe des Erwartungsnutzens der reinen Strategien $s_n \in S_n$, wobei die Gewichte gerade die Wahrscheinlichkeiten sind, mit denen die s_n unter δ_n gewählt werden. Als mehr oder weniger unmittelbares Korollar hiervon erhalten wir den folgenden Satz, der bei der Bestimmung von gemischten Gleichgewicht beinahe immer zur Anwendung kommt:

Satz 22 *Sei (N, S, u) ein endliches Spiel in strategischer Form. $\delta \in \Delta(S)$ ist genau dann ein gemischtes Nash-Gleichgewicht in (N, S, u), wenn für alle $n \in N$ und $s \in S_n$ gilt: $\delta_n(s) > 0 \implies Eu_n(\mathbf{s}, \delta_{-n}) \geq Eu_n(\mathbf{t}, \delta_{-n})$ für alle $t \in S_n$.*

Ein gemischtes Nash-Gleichgewicht lässt sich also daran erkennen, dass jede reine Strategie, die mit positiver Wahrscheinlichkeit im Gleichgewicht gewählt wird, selbst eine beste Antwort ist. Eine unmittelbare Folge dieses Satzes ist, dass zwei reine Strategien eines Spielers, die beide mit positiver Wahrscheinlichkeit in einem gemischten Gleichgewicht gewählt werden, denselben Erwartungsnutzen haben. Ferner impliziert dieser Satz offenbar, dass jedes Nash-Gleichgewicht im zugrundeliegenden Spiel ein gemischtes Nash-Gleichgewicht ist.

Mit diesen Kenntnissen ausgerüstet, können wir uns nun an die Bestimmung der gemischter Gleichgewichte im CG machen. Wir sehen sofort, dass (c, d) und (d, c) als Nash-Gleichgewichte auch gemischte Nash-Gleichgewichte sind. Überprüfen wir nun, ob es ein Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler wirklich mischt (d.h. eine gemischte Strategie wählt, die tatsächlich beiden reinen Strategien c und d eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet) und der andere Spieler eine reine Strategie wählt. Ein solches Gleichgewicht gibt es aber nicht, denn im CG hat jeder Spieler auf jede reine Strategie eine eindeutig bestimmte beste Antwort (vgl. Satz 22). Also bleibt noch die Möglichkeit, dass beide Spieler echt mischen. In diesem Fall können wir mit Satz 22 wie folgt ansetzen: Sei $\alpha := \delta_1(c) > 0$ und $\beta := \delta_2(c) > 0$. Ist (δ_1, δ_2) ein echt gemischtes Nash-Gleichgewicht, so muss u.a. die folgende Gleichung gelten:

$$Eu_1(c, \delta_2) = \beta \cdot 3 + (1 - \beta) \cdot 1 = \beta \cdot 4 + (1 - \beta) \cdot 0 = Eu_1(d, \delta_2).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\beta = \frac{1}{2}$ ist. Wegen der Symmetrie des Spiels folgt ebenso $\alpha = \frac{1}{2}$. Mit Satz 22 können wir also schließen, dass es im CG ein eindeutig bestimmtes echt gemischtes Nash-Gleichgewicht gibt, in dem beide Spieler mit gerade 50% Wahrscheinlichkeit zwischen ihren reinen Strategien randomisieren.

Gemischte Strategien spielen in vielen Anwendungen eine entscheidende Rolle (z.B. Diekmann 1985; Berger und Hammer 2007). Es gibt allerdings auch skeptische Einwände gegen dieses Konzept (vgl. Rubinstein 1996; Gintis 2009). Insbesondere argumentieren einige Autoren, dass eine gemischte Strategie eines Spielers nicht derart zu interpretieren ist, dass dieser Spieler tatsächlich zwischen seinen reinen Strategien randomisiert, sondern die Erwartungen der anderen Spieler hinsichtlich seiner Handlungen zum Ausdruck bringt. Adoptiert man diese Interpretation gemischter Strategien, hat das gemischte Nash-Gleichgewicht nur geringe Implikationen für beobachtbares Verhalten. Der prädiktive Gehalt von gemischten Gleichgewichten ist ohnehin gering. Denn Satz 22 impliziert ja unter anderem, dass die Anreize der Spieler sich an ihren Part in einem gemischten Gleichgewicht zu halten sehr gering sind - jede andere Mischung zwischen reinen Strategien, die selbst eine beste Antwort sind, ist optimal. In einem gewissen Sinne 'muss' beispielsweise Spieler 1 im CG nur deshalb zwischen seinen reinen Strategien mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit randomisieren, damit Spieler 2 indifferent zwischen seinen beiden reinen Strategien ist. Es gibt darüberhinaus keinen Grund, der in der Entscheidungssituation von Spieler 1 selbst angelegt ist, gerade diese Mischung zu wählen.

Dennoch ist das Konzept der gemischten Strategien auch auf theoretischer Ebene von besonderer Bedeutung. Der Grund dafür ist in folgendem Satz zu sehen.

Satz 23 (Nash 1950) *Jedes endliche Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

Der Satz garantiert, dass in einer breiten Klasse an Spiele zumindest Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien existieren. Diese Aussage ist für Theoretiker deshalb so wichtig, weil ansonsten kaum Hoffnung bestünde, überhaupt eine etwas allgemeinere Theorie strategischer Interaktionen entwickeln zu können.

Wir haben nun das wichtigste Lösungskonzept für Spiele in strategischer Form kennengelernt. In der Literatur gibt es eine Vielzahl weiterer Lösungskonzepte. in etwa Rationalisierbarkeit, iterierte Dominanz oder propere Gleichgewichte (vgl. Myerson 1991; Osborne und Rubinstein 1994). Insbesondere gibt es sehr viele Lösungskonzepte, die Verfeinerungen des Nash-Gleichgewichts darstellen, d.h. die nur einen Teil der unter Umständen vielen Nash-Gleichgewichte eines Spiels als gleichgewichtig designieren.

3.1.2 *Spiele in extensiver Form*

Neben dem Spiel in strategischer Form gibt es noch ein zweites kanonisches Modell in der nichtkooperativen Spieltheorie, das sogenannte Spiel in extensiver Form. Die extensive Form bietet sich besonders dann an, wenn die zu modellierende Interaktionssituation strukturiert in dem Sinne ist, dass die Voraussetzungen für das Handeln eines Spielers erst durch die Handlungen der anderen Spieler geschaffen werden. Dies führt auf intuitive Weise zu dem Konzept einer Verlaufsmenge, welche die wesentliche Komponente eines Spiels in extensiver Form ist und beschreibt, welche Abfolgen von Aktionen in einem konkreten Spiel überhaupt möglich sind:

Definition 24 *Eine Verlaufsmenge V ist eine nichtleere Menge endlicher oder unendlicher Folgen von Aktionen, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *die leere Folge $\circ$ ist ein Element von V,*
- *aus $(a_i)_{i=1}^k \in V$ folgt $(a_i)_{i=1}^l \in V$ für alle $l \leq k$,*
- *ist $(a_i)_{i=1}^\infty$ eine unendliche Folge und gilt $(a_i)_{i=1}^k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $(a_i)_{i=1}^\infty \in V$.*

Ein Verlauf $v \in V$ heißt terminal, wenn er entweder unendlich ist (d.h. $v = (a_i)_{i=1}^\infty$) oder von der Gestalt $v = (a_i)_{i=1}^k$ und keine Aktion a_{k+1} existiert, so dass $(a_i)_{i=1}^{k+1} \in V$. Die Menge aller terminalen Verläufe sei Z.

Anders als bei Spielen in strategischer Form gibt es keine einfache Definition von Spielen in extensiver Form, die alle Unterformen dieser Spiele abdeckt. Wir können in diesem Beitrag lediglich die einfachste Art von Spielen in extensiver Form besprechen: Spiele in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur. Diese Darstellung lässt sich mehr oder weniger problemlos auf Spiele mit Zügen der Natur (Situationen, in denen der Zufall eine Rolle spielt) übertragen. Deutlich mehr Aufwand ist allerdings bei der Betrachtung von Spielen in extensiver Form bei imperfekter Information nötig. Bei Spielen mit perfekter Information wissen die Spieler stets, was zuvor geschehen ist, d.h., wenn es an der Zeit ist eine Entscheidung zu treffen, weiß jeder Spieler genau, welcher Verlauf vorliegt. Bei Spielen mit imperfekter Information gibt es hingegen Entscheidungssituationen, in denen ein Spieler nicht genau weiß, was zuvor im Spiel geschehen ist, d.h., er weiß nur, dass ein Verlauf aus einer Menge von Verläufen der Fall ist. In diesem Fall spielen dann seine Erwartungen (beliefs) eine besondere Rolle, die es nötig machen kann, Gleichgewichtskonzepte zu formulieren, die nicht nur auf Strategieprofile Bezug nehmen, sondern auch auf die Erwartungen der Spieler. Auch wenn wir in diesem Beitrag nicht auf derartige Überlegungen eingehen können, sei dem Leser versichert, dass die Grundidee der sequentiellen Rationalität, die im Folgenden hoffentlich deutlich wird, auch der Behandlung von Spielen bei imperfekter Information unterliegt.

Auf Grundlage des Konzeptes einer Verlaufsmenge lassen sich Spiele in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur wie folgt beschreiben.

Definition 25 *Ein Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur ist ein Tupel $\left(N, V, \eta, (u_n)_{n \in N}\right)$, wobei*

- *N eine nichtleere Menge, die Spielermenge,*
- *V eine Verlaufsmenge,*
- *$\eta : V \backslash Z \to N$ eine Abbildung, die angibt, welcher Spieler am Zug ist, und*

- $u_{n:}: Z \to \mathbb{R}$ *eine Nutzenfunktion für Spieler* $n \in N$ *auf der Menge der terminalen Verläufe* Z.

Für jeden Spieler $n \in N$ *sei* $V_n := \{v \in V \backslash Z : \eta(v) = n\}$ *die Menge seiner Entscheidungspunkte. An einem Entscheidungspunkt* $v = (a_i)_{i=1}^k \in V_n$ *muss Spieler* $n \in N$ *aus der Menge* $A_v := \{a : (a_1, \ldots, a_k, a) \in V\}$ *wählen. Ferner definieren wir noch (aus rein technischen Gründen)* $A^n := \cup_{v \in V_n} A_v$.

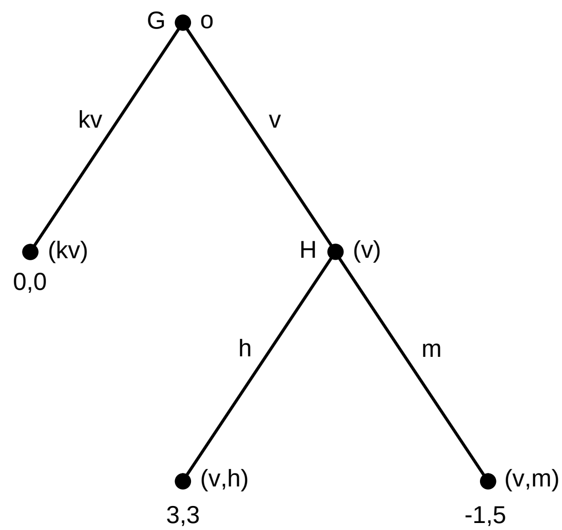
Die Komponenten V und η beschreiben demnach, welcher Spieler in welcher Situation etwas tun kann, d.h., sie beschreiben die wesentliche Struktur eines Spiels in extensiver Form. Die Spieler haben Präferenzen über die finalen Abfolgen von Entscheidungen in der Interaktionssituation, d.h. über terminale Verläufe. Bemerkenswerterweise tauchen in dieser Definition die Strategiemengen der Spieler gar nicht auf. Trotzdem werden sich auch die Gleichgewichtskonzepte für Spiele in extensiver Form auf Strategieprofile beziehen. Bevor wir sehen, wie die Strategien der Spieler auf Grundlage eines Tupels $\left(N, V, \eta, (u_n)_{n \in N}\right)$ konstruiert werden, betrachten wir zunächst zwei konkrete Spiele in extensiver Form, auf die wir noch häufig zurückgreifen werden.

Beispiel 26 *Trust game, TG:* $N = \{G, H\}$, $V = \{\circ, (v), (kv), (v, h), (v, m)\}$, $\eta(\circ) = G, \eta((v)) = H$, *und schließlich* $u_G((kv)) = u_H((kv)) = 0$, $u_G((v, h)) = u_H((v, h)) = 3$, *sowie* $u_G((v, m)) = -1$ *und* $u_H((v, m)) = 5$. *In diesem Spiel gibt es einen Treugeber (G) und einen Treuhänder (H). Der Treugeber kann zunächst entweder Vertrauen geben (v) oder kein Vertrauen geben (kv). Der Treuhänder kann gegebenes Vertrauen entweder honorieren (h) oder missbrauchen (m). Die Auszahlungen sind so gewählt, dass der Treuhänder von einem Missbrauch des Vertrauens profitiert, aber sich als honoriger Treuhänder immer noch besserstellt, als wenn ihm gar nicht vertraut wird. Dem Treuhänder wiederum ist es am liebsten, wenn sein Vertrauen honoriert wird, und er vertraut dem Treuhänder lieber nicht, bevor sein Vertrauen missbraucht wird.*

Beispiel 27 *Ultimatum game, UG (vgl. Güth u. a. 1982):* $N = \{1, 2\}$, $V = \{\circ\} \cup \{(x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 1) : 0 \leq x \leq 1\}$, $\eta(\circ) = 1$, $\eta((x)) = 2$ *für alle* $0 \leq x \leq 1$, *und schließlich* $u_1((x, 1)) = 1 - u_2((x, 1)) = x$ *für alle* $0 \leq x \leq 1$ *sowie* $u_1((x, 0)) = u_2((x, 0)) = 0$ *für alle* $0 \leq x \leq 1$. *Dieser Formalismus entspricht folgendem Szenario: Spieler 1 teilt 1 Euro zwischen sich und Spieler 2 auf. Akzeptiert Spieler 2 diese Aufteilung, bekommen beide die entsprechende Auszahlung. Akzeptiert Spieler 2 diese Aufteilung nicht, bekommen beide die Auszahlung 0.*

Ist ein Spiel in extensiver Form *endlich* in dem Sinne, dass die Verlaufsmenge V nur endlich viele Elemente enthält, dann kann man das Spiel mit Hilfe eines Spielbaums (eines Graphen) veranschaulichen. Dabei sind die Elemente $v \in V$ die Knoten, welche, sofern sie Entscheidungspunkte sind, durch η einem Spieler zugeordnet werden. Die Kanten entsprechen einzelnen Aktionen. Vermöge der Nutzenfunktionen u_n, $n \in N$ können den 'Endknoten' (terminale Verläufe)

Auszahlungstupel zugeordnet werden. So lässt sich beispielsweise das TG in der folgenden Art darstellen:



Spielbaum für das trust game

Bei endlichen Spielen in extensiver Form bietet sich diese Darstellung mithilfe sogenannter Spielbäume durchaus an. Allerdings ist die Theorie natürlich nicht auf endliche Spiele begrenzt, weshalb wir für eine allgemeine Definition eines Spiels in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur das Konzept der Verlaufsmenge benutzt haben.

Wenden wir uns nun der Definition der Strategiemengen in einem extensiven Spiel zu.

Definition 28 *Eine (reine) Strategie von Spieler $n \in N$ in einem extensiven Spiel bei perfekter Information ohne Züge der Natur ordnet jedem seiner Entscheidungspunkte eine (zulässige) Aktion zu, d.h., die Strategiemenge von Spieler n ist $S_n := \{s : V_n \to A^n \text{ mit } s(v) \in A_v \text{ für alle } v \in V_n\}$.*

Eine Strategie eines Spielers spezifiziert also für jede denkbare Situation, in der es an dem Spieler wäre, sich zu entscheiden, welche Aktion er dort wählen würde. Im TG hat jeder Spieler nur einen Entscheidungspunkt und dort nur jeweils zwei Aktionen zur Verfügung. Entsprechend gilt $S_G = A_\circ = \{v, kv\}$ und $S_H = A_{(v)} = \{h, m\}$.[2] Das UG ist etwas interessanter. Spieler 1 hat nur

[2] Streng genommen ist das falsch, denn Strategiemengen sind bei der extensiven Form stets Mengen von Abbildungen. Richtig wäre bsp. $S_G = \{s_1, s_2\}$ mit $s_i : \circ \to A^G$ für $i = 1, 2$ und $s_1(\circ) = v$ sowie $s_2(\circ) = kv$. Natürlich können wir aber s_1 mit der Aktion v und s_2 mit der Aktion kv identifizieren, so dass unsere vereinfachende Darstellung im Fließtext unproblematisch ist.

einen Entscheidungspunkt und dort die Möglichkeit, seinen Anteil am 'Kuchen' vorzuschlagen, so dass wir $S_1 = A_\circ = [0,1]$ erhalten. Jeder mögliche Vorschlag von Spieler 1 impliziert einen eigenen Entscheidungspunkt von Spieler 2; an jedem dieser Entscheidungspunkte hat er die Möglichkeit, den Vorschlag anzunehmen (1) oder abzulehnen (0). Eine Strategie von Spieler 2 muss demnach für jeden denkbaren Vorschlag von Spieler 1 angeben, ob Spieler 2 den Vorschlag akzeptiert oder ablehnt. Es gilt also $S_2 = \{s : [0,1] \to \{0,1\}\}$.[3]

Wir sind nun in der angenehmen Position, alle unsere Konzepte zu Spielen in strategischer Form auch auf Spiele in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur anwenden zu können. Denn wir können jedem Spiel in extensiver Form eindeutig ein Spiel in strategischer Form zuordnen — die Spielermenge übernehmen wir einfach, die Strategiemengen der Spieler können wir vermöge Definition 28 konstruieren. Alles, was uns noch zur Beschreibung eines Spiels in strategischer Form fehlt, ist eine Nutzenfunktion für jeden Spieler, die auf der Menge der Strategieprofile $S := \times_{n \in N} S_n$ definiert ist. Die Beschreibung eines Spiels in extensiver Form enthält Nutzenfunktionen, die jeweils auf der Menge der terminalen Verläufe definiert sind. Weil nun jedes Strategieprofil $s \in S$ eindeutig einen terminalen Verlauf induziert,[4] erhalten wir hieraus auf natürliche Weise Nutzenfunktionen, die auf S definiert sind. Mithilfe dieser Konstruktion können wir also jedem Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur eindeutig ein Spiel in strategischer Form zuordnen und mithin die uns bekannten Konzepte zur strategischen Form auch auf Spiele in extensiver Form anwenden.

Dieses Vorgehen lässt sich gut am TG illustrieren. Die strategische Form des TG hat die folgende Gestalt:

	h	m
v	$3,3$	$-1,5$
kv	$0,0$	$0,0$

Dabei ordnen wir beispielsweise dem Strategieprofil (kv, h) das Auszahlungstupel $(0,0)$ zu, weil (kv, h) den terminalen Verlauf (kv) induziert, und diesem Verlauf in der Beschreibung des TG das Auszahlungstupel $(0,0)$ zugeordnet ist.

Definition 29 *Ein Strategieprofil $s \in S$ in einem Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur heißt gemischtes Nash-Gleichgewicht,*

[3] Wiederum ist das rein formal nicht ganz exakt — es ist nämlich $S_2 = \{s : \{(x) : 0 \leq x \leq 1\} \to \{0,1\}\}$. Die weitere Darstellung profitiert aber sehr von unserer vereinfachten Notation.

[4] Zu $s \in S$ gehört nämlich der terminale Verlauf

$$\left(s_{\eta(\circ)}(\circ), s_{\eta\left(\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)\right)}\left(\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)\right), \ldots\right).$$

In Worten: Zunächst wählt Spieler $\eta(\circ)$ gemäß seiner Strategie $s_{\eta(\circ)}$ an seinem Entscheidungspunkt $\circ$. Das erzeugt den Verlauf $\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)$. Jetzt ist Spieler $\eta\left(\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)\right)$ an der Reihe, der gemäß seiner Strategie $s_{\eta\left(\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)\right)}$ wählt, und damit den Verlauf fortsetzt zu $\left(s_{\eta(\circ)}(\circ), s_{\eta\left(\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)\right)}\left(\left(s_{\eta(\circ)}(\circ)\right)\right)\right)$, usw.

wenn s ein gemischtes Nash-Gleichgewicht in dem zugehörigen Spiel in strategischer Form ist.

Im TG gibt es also genau ein reines Nash-Gleichgewicht, in dem Spieler 1 kein Vertrauen gibt und Spieler 2 'plant' das Vertrauen zu missbrauchen. Im UG gibt es hingegen unendlich viele reine Nash-Gleichgewichte. Insbesondere kann jede Aufteilung des Euros in einem Nash-Gleichgewicht gestützt werden. Denn für jedes $x \in [0,1]$ ist das Strategieprofil $(s_1, s_2) \in S$ mit $s_1 = x$, $s_2(y) = 0$ für alle $x < y \leq 1$ und $s_2(y) = 1$ für alle $0 \leq y \leq x$ offenbar ein Nash-Gleichgewicht und realisiert den terminalen Verlauf $(x, 1)$ mit dem Auszahlungstupel $(x, 1-x)$.

Teilspielperfektheit und Rückwärtsinduktion

In unserer bisherigen Darstellung reduzieren wir jedes Spiel in extensiver Form bei perfekter Information lediglich auf die zugehörige strategische Form, um dann unsere bekannten Gleichgewichtskonzepte auf dieses Spiel anzuwenden. Die extensive Form wäre für die nichtkooperative Spieltheorie allerdings von vergleichsweise minderer Bedeutung, wenn es keine Gleichgewichtskonzepte gäbe, die explizit auf ihre reichhaltige Struktur eingingen. Das wichtigste Konzept in diesem Zusammenhang ist die sogenannte Teilspielperfektheit.

Um dieses Konzept einführen zu können, benötigen wir etwas mehr Notation. Sei A eine Menge von Aktionen und seien $v = (a_i)_{i=1}^k$, $v' = (b_i)_{i=1}^l$ sowie $v'' = (c_i)_{i=1}^\infty$ Folgen mit Elementen aus A. Dann setzen wir $\langle v, v' \rangle := (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$ und $\langle v, v'' \rangle := (a_1, \ldots, a_k, c_1, c_2, c_3, \ldots)$ und sprechen von der Verkettung von Folgen. Ferner sei $\langle w, \circ \rangle := w$ und $\langle \circ, w \rangle := w$ für jede Folge w mit Elementen aus A.

Definition 30 *Sei $\left(N, V, \eta, (u_n)_{n \in N}\right)$ ein Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur und sei $v \in V \backslash Z$ ein Entscheidungspunkt. Das Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur $\left(N, V^v, \eta^v, (u_n^v)_{n \in N}\right)$ heißt Teilspiel von $\left(N, V, \eta, (u_n)_{n \in N}\right)$ mit Ursprung v, wobei*

- $V^v := \{v' : \langle v, v' \rangle \in V\}$ *(Z^v sei die zu V^v zugehörige Menge der terminalen Verläufe),*
- $\eta^v(v') := \eta(\langle v, v' \rangle)$ *für alle $v' \in V^v \backslash Z^v$, und*
- $u_n^v(v') := u_n(\langle v, v' \rangle)$ *für alle $v' \in Z^v$ und alle $n \in N$.*

Die Idee hinter dem Begriff eines Teilspiels ist sehr einfach. An jedem Entscheidungspunkt kann man den 'Rest' des Spiels als eigenes Spiel in extensiver Form auffassen. Entsprechend setzt sich V^v aus den Endstücken aller Verläufe, die v als 'Anfangsstück' enthalten, zusammen. Die restliche Struktur des Spiels können wir einfach aus dem zugrunde liegenden Spiel übernehmen. Aus konventionellen Gründen ist jedes Spiel auch ein Teilspiel von sich selbst (denn $\left(N, V, \eta, (u_n)_{n \in N}\right) = \left(N, V^\circ, \eta^\circ, (u_n^\circ)_{n \in N}\right)$). Teilspiele, die nicht den Ursprung $\circ$ haben, heißen echte Teilspiele.

Das TG hat deshalb genau zwei Teilspiele. Das Spiel selbst und das Teilspiel mit Ursprung (v). Das UG hingegen besitzt unendlich viele Teilspiele – jede Aufteilung $x \in [0,1]$ induziert ein Teilspiel.

Wenn wir nun ein Strategieprofil $s \in S$ in einem Spiel in extensiver Form gegeben haben, induziert dieses Strategieprofil auch ein Strategieprofil in jedem Teilspiel. Denn s gibt uns für jeden Entscheidungspunkt an, welche Aktion dort gewählt wird – für ein Strategieprofil eines Teilspiels brauchen wir aber nur die Information darüber, welche Aktionen an den Entscheidungspunkten getroffen werden, die auch in dem Teilspiel liegen.

Definition 31 (Selten 1965) *Ein Strategieprofil $s \in S$ in einem Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur heißt teilspielperfekt, wenn es ein Nash-Gleichgewicht in jedem Teilspiel induziert.*

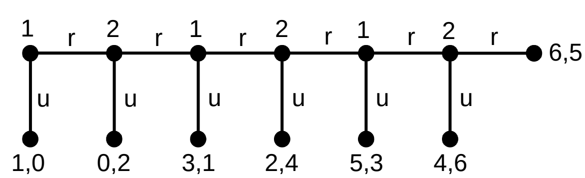
Ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist stets auch ein Nash-Gleichgewicht, denn jedes Spiel in extensiver Form ist auch ein Teilspiel von sich selbst. Umgekehrt ist aber nicht jedes Nash-Gleichgewicht ein teilspielperfektes Gleichgewicht, d.h., Teilspielperfektheit ist eine Verfeinerung des Nash-Gleichgewichts. Der Hauptunterschied der beiden Gleichgewichtskonzepte liegt im Folgenden: Angenommen das Strategieprofil $s \in S$ ist ein Nash-Gleichgewicht. s induziert einen eindeutigen terminalen Verlauf, den sogenannten Gleichgewichtspfad $v \in Z$. Das Nash-Gleichgewichtskonzept stellt nun weit weniger Anforderungen an das Verhalten der Spieler in Situationen (Entscheidungspunkten), die nicht auf dem Gleichgewichtspfad v liegen.

Dies lässt sich gut am UG illustrieren. Wir haben uns schon überlegt, dass jede Aufteilung des Euros in diesem Spiel durch ein Nash-Gleichgewicht gestützt werden kann. Dabei haben wir eine Art Drohstrategie von Spieler 2 betrachtet: Spieler 2 hat jede Aufteilung, die Spieler 1 mehr als $x \in [0,1]$ zuspricht, zurückgewiesen und jede Aufteilung, die Spieler 1 nicht mehr als x zuspricht, akzeptiert. Derartige Strategien können jedoch nicht Teil eines teilspielperfekten Gleichgewichts sein. Formal induziert jeder Vorschlag $y \in [0,1]$ ein eigenes Teilspiel mit Ursprung (y). Diese Teilspiele bestehen jeweils nur aus der Entscheidung von Spieler 2 die Aufteilung anzunehmen oder zu verwerfen. Sofern $y < 1$ ist, gibt es nur ein Gleichgewicht in dem betreffenden Teilspiel, nämlich die Aufteilung zu akzeptieren. Im Falle von $y = 1$ ist sowohl die Annahme als auch die Ablehnung der Aufteilung gleichgewichtig. Mit anderen Worten: Die Drohstrategien von Spieler 2, die wir bei der Konstruktion der Nash-Gleichgewichte verwendet haben, sind *unglaubwürdig*, denn wenn Spieler 2 mit einer zu hohen Forderung von Spieler 1 konfrontiert wäre, läge es gar nicht in seinem Interesse, die Drohung wahrzumachen.

Wenn $s_2 \in S_2$ bzw. $s_2' \in S_2$ Teil eines teilspielperfekten Gleichgewichts im UG ist, dann muss es entweder von der Gestalt $s_2(y) = 1$ für alle $y \in [0,1]$ oder von der Gestalt $s_2'(y) = 1$ für alle $y \in [0,1)$ und $s_2'(1) = 0$ sein. Auf s_2 hat Spieler 1 eine eindeutig beste Antwort, nämlich $s_1 = 1$. Aus technischen Gründen gibt es auf s_2' keine beste Antwort von Spieler 1, denn es existiert keine größte Zahl im Intervall $[0,1)$. Alles in allem gibt es im UG also nur ein teilspielperfektes Gleichgewicht: Spieler 1 fordert alles für sich und Spieler 2 akzeptiert jede Aufteilung.

Bei der Bestimmung der teilspielperfekten Gleichgewichte im UG haben wir uns einer Methode bedient, die sich insbesondere auf alle endlichen Spiele in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur anwenden lässt, der sogenannten *Rückwärtsinduktion*. In endlichen Spielen gibt es nur endlich viele Verläufe, die alle von endlicher Länge sind. Wir betrachten nun die Menge der Entscheidungspunkte $V \backslash Z = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Jeder dieser Entscheidungspunkte ist von der Gestalt $v_i = \left(a_j^i\right)_{j=1}^{m_i}$ mit $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k$. Sei nun $l \in \{1, \ldots, k\}$ so gewählt, dass $m_l \geq m_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt, d.h., v_l hat maximale Länge in der Menge $V \backslash Z$. Das Teilspiel mit Ursprung v_l hat folgende Gestalt: Spieler $\eta(v_l) \in N$ wählt aus der Aktionsmenge A_{v_l} und induziert damit einen der terminalen Verläufe aus der Menge $\{\langle v_l, (a) \rangle : a \in A_{v_l}\}$. In diesem Teilspiel gibt es gleichgewichtige Strategien, die nur aus einer Aktion bei diesem Verlauf bestehen. Wir können nun den Verlauf v_l in den Auszahlungsfunktionen u_n für $n \in N$ bewerten, indem wir gleichgewichtiges Verhalten im Teilspiel mit Ursprung v_l annehmen und die terminalen Verläufe $\{\langle v_l, (a) \rangle : a \in A_{v_l}\}$ 'streichen'.[5] Dadurch erhalten wir ein 'kleineres' Spiel. Diese Methode lässt sich rekursiv fortsetzen, bis man schließlich ein Spiel vor sich hat, das lediglich aus einem Entscheidungspunkt und terminalen Verläufen besteht. Bestimmt man auch hier die gleichgewichtigen Strategien, kann man die teilspielperfekten Strategieprofile des Ausgangsspiels aus den Überlegungen, die man im Zusammenhang mit den kleineren Spielen angestellt hat, bestimmen.

Die Methode lässt sich gut am centipede game (CG) illustrieren (vgl. Rosenthal 1981):

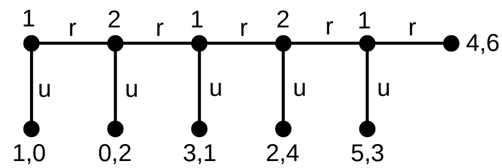


Spielbaum für das centipede game

Der Entscheidungspunkt (r, r, r, r, r) hat maximale Länge. Im Teilspiel mit Ursprung (r, r, r, r, r) ist eindeutig u gleichgewichtig. Das merken wir uns (z.B. in dem wir die Kante, die r symbolisiert, stricheln). Wenn wir davon ausgehen, dass Spieler 2 im Teilspiel mit Ursprung (r, r, r, r, r) die Strategie u wählt, können

[5] Gibt es in einem Teilspiel mehr als eine gleichgewichtige Strategie, muss man die Prozedur separat für jede Möglichkeit durchführen. Rückwärtsinduktion bietet sich deshalb insbesondere dann an, wenn kein Spieler indifferent zwischen zwei terminalen Verläufen ist.

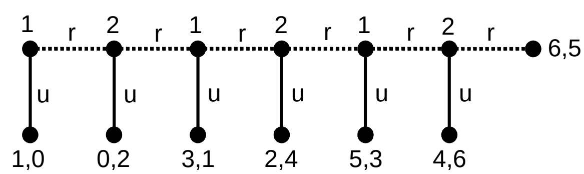
wir diesen Verlauf als terminal mit Nutzentupel $(4, 6)$ ansehen:



Spielbaum für ein ‘kleineres’ centipede game

In diesem kleinerem CG hat der Entscheidungspunkt (r, r, r, r) maximale Länge. Im Teilspiel mit Ursprung (r, r, r, r) ist eindeutig u gleichgewichtig. Wir können also dieses kleinere Spiel auf ein noch kleineres Spiel ‘reduzieren’. Wenn wir dieses Vorgehen rekursiv wiederholen, gelangen wir schließlich zu einem Spiel, in dem Spieler 1 mit Strategie u das Auszahlungstupel $(1, 0)$ und mit Strategie r das Auszahlungstupel $(0, 2)$ realisieren kann. Mithin ist dort wiederum u gleichgewichtig.

Wenn wir die jeweils gleichgewichtigen Strategien im Spielbaum mithilfe des ‘Strichelns’ kenntlich gemacht haben, ergibt sich dann folgendes Bild:



Rückwärtsinduktion im centipede game

Hieraus ersehen wir, dass die Methode der Rückwärtsinduktion eindeutig zum Strategieprofil $(s_1, s_2) \in S$ mit $s_1 = (u, u, u) = s_2$ führt. Interessant ist diese Methode insbesondere aufgrund von

Satz 32 *Für jedes endliche Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur gilt: Die Menge der Strategieprofile, die mit Rückwärtsinduktion vereinbar sind, und die Menge der teilspielperfekten Strategieprofile sind identisch.*

Dem Satz zufolge gibt es also im CG nur ein teilspielperfektes Strategieprofil, in dem beide Spieler stets u wählen. Neben der Nützlichkeit bei der Bestimmung von teilspielperfekten Gleichgewichten ist Rückwärtsinduktion auch in der Theorie an sich von Bedeutung. Man kann sie nämlich dazu benutzen, die folgende essentielle Existenzaussage zu beweisen:

Satz 33 (Kuhn 1950) *Jedes endliche Spiel in extensiver Form bei perfekter Information ohne Züge der Natur besitzt ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Wir haben nun mit der Teilspielperfektheit ein wichtiges Gleichgewichtskonzept kennengelernt, das anders als das Nash-Gleichgewicht die reichhaltigere sequentielle Struktur von Spielen in extensiver Form berücksichtigt. Der Grundgedanke, Rationalität auch in Situationen zu fordern, die de facto auf dem Gleichgewichtspfad gar nicht auftreten, unterliegt auch anderen Lösungskonzepten für die extensive Form, insbesondere auch dem sequentiellen Gleichgewicht für extensive Spiele bei imperfekter Information oder dem perfekten Bayesschen Gleichgewicht für Bayes Spiele (Osborne und Rubinstein 1994, Kapitel 11). Ferner ist das Konzept der Teilspielperfektheit auch zentral bei einer speziellen Art von Spielen in extensiver Form, den sogenannten wiederholten Spielen, die sich als besonders fruchtbar in der Sozialtheorie erwiesen haben (vgl. den Beitrag 'Soziale Normen' in diesem Handbuch).

3.1.3 Anwendungen

Es stellt sich nun die Frage, für was diese vielen Konzepte der nichtkooperativen Spieltheorie überhaupt zu gebrauchen sind. Hierzu ist zunächst festzuhalten, dass die nichtkooperative Spieltheorie eine beinahe bestürzende Vielzahl an Anwendungen in den Sozialwissenschaften (und nicht nur dort) gefunden hat. Ein großer Teil dieser Anwendungen arbeitet dabei mit dem folgenden Prinzip: Ein soziales Phänomen gilt als erklärt, wenn ein intuitiv eingängiges und zur Situation stimmiges Spiel formuliert wurde und das Phänomen in einem Gleichgewicht dieses Spiels besteht. Eine Paradebeispiel für dieses Prinzip einer spieltheoretischen Erklärung ist Andreas Diekmanns (1985) Freiwilligendilemma. Diekmann möchte eine spieltheoretische Erklärung für das folgende Phänomen bereitstellen: Je größer die Zahl der Beobachter einer Situation der Hilfsbedürftigkeit, desto geringer der Anteil derjenigen Beobachter, die tatsächlich helfen. Um dieses Phänomen zu erklären, formuliert Diekmann zunächst das sogenannte Freiwilligendilemma: Es sei $N = \{1, \ldots, k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$, ferner sei $S_n = \{v, d\}$ für alle $n \in N$. Ist $s = (s_n) \in S$ ein Strategieprofil, so sei $\phi(s)$ die Anzahl derjenigen Spieler, für die $s_n = v$ gilt. Dann sei für $n \in N$ und $s_{-n} \in S_{-n}$

$$u_n(d, s_{-n}) = \begin{cases} b, & \phi(d, s_{-n}) \geq 1, \\ 0 & \phi(d, s_{-n}) = 0, \end{cases} \quad \text{und } u_n(v, s_{-n}) = b - c,$$

wobei $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b > c > 0$. Die Intuition zu diesem Spiel erschließt sich, wenn man v als die Strategie, Hilfe zu leisten, und d als die Strategie, keine Hilfe zu leisten, interpretiert. Den Nutzenfunktionen u_n für $n \in N$ zufolge, ist es jedem Spieler am liebsten, wenn ein anderer Spieler hilft, allerdings zieht es jeder Spieler auch vor, selbst zu helfen, bevor gar keine Hilfe geleistet wird.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass es in diesem Spiel gerade k Nash-Gleichgewichte gibt, die dadurch charakterisiert sind, dass gerade ein Spieler hilft und alle anderen Spieler keine Hilfe leisten. Interessanter als diese Beobachtung ist die Frage, ob es auch echte gemischte Nash-Gleichgewichte gibt. Betrachten wir aus Gründen der Einfachheit lediglich symmetrische Gleichgewichte, d.h. $\delta_n = \delta_m$ für alle $m, n \in N$, wobei δ_n, δ_m gemischte Strategien seien.

Sei $p := \delta_n(d)$ die Wahrscheinlichkeit nicht zu helfen. Mit Satz 22 muss in einem solchen gemischten Gleichgewicht die Gleichung

$$Eu_n(v, \delta_{-n}) = b - c = \left(1 - p^{k-1}\right) \cdot b + p^{k-1} \cdot 0 = Eu_n(d, \delta_{-n})$$

erfüllt sein. Diese Gleichung hat eine eindeutig bestimmte Lösung im Einheitsintervall, wobei $p = \sqrt[k-1]{\frac{c}{b}}$. Wiederum mit Satz 22 sehen wir, dass es in der Tat ein gemischtes Gleichgewicht ist, wenn jeder Spieler mit Wahrscheinlichkeit $\sqrt[k-1]{\frac{c}{b}}$ nicht hilft. Weil nun aber $b > c > 0$ ist, steigt der Ausdruck $\sqrt[k-1]{\frac{c}{b}}$ mit steigendem k an. Das bedeutet, dass der Anteil derjenigen, die im Gleichgewicht Hilfe leisten, bei steigender Spielerzahl abnimmt. Das ist aber gerade das zu erklärende Phänomen.

Ähnlich wie in diesem Beispiel werden in vielen Anwendungen Phänomene als erklärt angesehen, wenn es gelingt, sie als Gleichgewicht eines überzeugenden Spiels zu rekonstruieren. Die Tatsache, dass das Konzept eines Spiels in strategischer Form oder auch das Konzept eines Spiels in extensiver Form auf relativ direkte Art und Weise mit realen Situationen in Zusammenhang gebracht werden kann, hat die Popularität dieser spieltheoretischen Art der Erklärung sicherlich begünstigt. Bei aller Wertschätzung für derartige Erklärungsversuche muss man sich dennoch vor Augen halten, dass die andere Komponente der Theorie, die für derartige Erklärungen benötigt wird, also die spieltheoretischen Lösungskonzepte doch durchaus heikel in ihrer empirischen Interpretation sind. Spieltheoretische Lösungskonzepte ruhen auf einer Vielzahl an Annahmen über das sozial geteilte Wissen der Spieler und auch auf kritischen Annahmen darüber, wie die Spieler die Situation wahrnehmen und was sie über die Situation denken. Von einer überzeugenden Erklärung erwartet man im Allgemeinen, dass sie tatsächlich die Gründe und Mechanismen aufzeigt, die den zu erklärenden Zusammenhang bewirken. Dieses Desideratum verfehlt man wohl in einer nicht unerheblichen Zahl der Fälle, wenn man Lösungskonzepte bedenkenlos auf Spiele anwendet, die mit Blick auf reale Situationen konstruiert wurden, ohne sich zu überlegen, ob die den Lösungskonzepten zugrundeliegenden Annahmen überhaupt der Situation angemessen sind.

3.2 Kooperative Spieltheorie

In der kooperativen Spieltheorie beschäftigt man sich im Allgemeinen damit, gewisse 'Verteilungsregeln' zu charakterisieren. Wir illustrieren im Folgenden dieses Vorgehen am Beispiel des Kerns und des Shapley-Wertes für TU-Spiele. Im Anschluss skizzieren wir wichtige Anwendungsfelder der kooperativen Spieltheorie.

Definition 34 *Ein TU-Spiel ist ein Tupel (N, u), wobei N eine nichtleere und endliche Menge ist, die Spielermenge, und $u : 2^N \to \mathbb{R}$ mit $u(\varnothing) = 0$, eine sogenannte charakteristische Funktion auf N. Ist N fixiert, so bezeichne U_N die Menge aller charakteristischen Funktionen auf N. Teilmengen von N nennt man auch Koalitionen.*

Je nach Kontext kann eine charakteristische Funktion unterschiedlich interpretiert werden. In vielen Situationen beschreibt die charakteristische Funktion, welche Auszahlung jede Koalition $S \subseteq N$ ohne die Mithilfe der anderen Spieler $N \backslash S$ bekommen kann. Ein Beispiel mag verdeutlichen, wie man eine reale Situation als TU-Spiel modellieren kann.

Beispiel 35 (Autospiel) *Bob* (B) *besitzt ein Auto, das er verkaufen möchte. Seine Entschädigungsforderung für das Auto, d.h. der Betrag, der ihn gerade indifferent macht zwischen dem Verkauf des Autos zu diesem Preis und dem Behalten des Autos, beträgt 1000 Euro. Es gibt nur zwei Interessenten. Lloyd* (L) *hat eine Zahlungsbereitschaft von* 1900 *Euro, Tom* (T) *hat eine Zahlungsbereitschaft von 1200 Euro. Diese Geschichte induziert das folgende TU-Spiel:* $u(\{B, L, T\}) = 900$, $u(\{B, L\}) = 900$, $u(\{B, T\}) = 200$ *und alle anderen Koalitionen haben einer Wert von* 0 *unter* u. *Die Idee dabei ist, dass die Differenz von Entschädigungsforderung und höchster Zahlungsbereitschaft, die eine Koalition beinhaltet, die Handelsgewinne bestimmt.*

Das Autospiel ist gut dafür geeignet, ein elementares Lösungskonzept für TU-Spiele, den sogenannten Kern, zu entdecken. Wir stellen uns die Frage, wer das Auto kaufen wird und zu welchem Preis. Vielen Lesern wird es als plausibel erscheinen, wenn Lloyd das Auto von Bob zu einem Preis zwischen 1200 und 1900 Euro kauft und der arme Tom leer ausgeht.

Definition 36 *Sei* N *fixiert und* $u \in U_N$. *Eine Abbildung* $x : N \to \mathbb{R}$ *liegt genau dann im Kern (vgl. Gillies 1953) von* u, *wenn* $\sum_{n \in N} x(n) = u(N)$ *und für alle* $S \subseteq N$ *gilt* $\sum_{n \in S} x(n) \geq u(S)$. *Liegt* x *im Kern von* u, *so schreiben wir* $x \in \ker u$.

Eine Abbildung $x : N \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Spieler eine Auszahlung zu. Für $n \in N$ schreibt man anstelle von $x(n)$ meistens einfach x_n. Die Menge all dieser Abbildungen ist $\mathbb{R}^N = \{x : N \to \mathbb{R}\}$. Ist $x \in \mathbb{R}^N$, so können wir x auch als Auszahlungsvektor $x = (x_n)_{n \in N}$ auffassen. Der Kern ist ein mengenwertiges Lösungskonzept, d.h., im Allgemeinen ist $|\ker u| \neq 1$. Es kann sogar vorkommen, dass der Kern eines Spiels leer ist.

Inhaltlich kann man der Kern eines TU-Spiels wie folgt interpretieren: Ist $x \in \ker u$ für $u \in U_N$, so arbeiten alle Spieler zusammen (wegen $\sum_{n \in N} x(n) = u(N)$) und Teilen die Früchte ihrer Zusammenarbeit derart auf, dass keine Koalition einen Anreiz hat, dieses Arrangement aufzukündigen ($\sum_{n \in S} x(n) \geq u(S)$ für alle $S \subseteq N$). Ist der Kern eines Spiels leer, so weiß man, dass ein solches Arrangement nicht existiert.

Man überlegt sich sofort, dass im Autospiel gilt: Für $x : N \to \mathbb{R}$ gilt $x \in \ker u$ genau dann, wenn $x_B + x_L = 900$, $x_B, x_L \geq 0$, und $x_T = 0$. Damit entspricht der Kern des Autospiels gerade der oben beschriebenen Intuition dahingehend, dass Lloyd Bobs Auto zu einem Preis zwischen 1200 und 1900 Euro kaufen wird.

Der Kern ist ein sehr intuitives Konzept, das nicht unbedingt einer Rechtfertigung durch grundlegendere Eigenschaften bedarf. Bei Lösungskonzepten, die jedem TU-Spiel gerade einen Auszahlungsvektor zuordnen und durch eine Formel oder einen Algorithmus beschrieben werden können, stellt sich jedoch die Frage nach ihren grundlegenden Eigenschaften.

Definition 37 *Sei N fixiert. Eine Abbildung $\phi : U_N \to \mathbb{R}^N$, d.h. eine Abbildung, die jedem TU-Spiel auf N einen Auszahlungsvektor $(x_n)_{n \in N}$ zuordnet, heißt punktwertiges Lösungskonzept.*

Ein einfaches punktwertiges Lösungskonzept ist beispielsweise die egalitäre Lösung $\phi_n^{eg}(u) := \frac{u(N)}{|N|}$, die jedem Spieler $n \in N$ in jedem Spiel $u \in U$ gerade den $|N|$-ten Teil des Werts der großen Koalition unter u zuordnet.

Die nächste Definition beschreibt einige Eigenschaften von Lösungskonzepten, die zumindest für manche Anwendungen solcher Lösungskonzepte attraktiv bzw. plausibel erscheinen können.

Definition 38 *Sei N fixiert und ϕ ein Lösungskonzept auf N. ϕ kann u.a. die folgenden Eigenschaften besitzen:*

E *Effizienz: Für alle $u \in U_N$ gilt $\sum_{n \in N} \phi_n(u) = u(N)$.*

S *Symmetrie: Für alle $u \in U_N$ und alle $m, n \in N$ mit $u(S \cup \{n\}) = u(S \cup \{m\})$ für alle $S \subseteq N$ mit $n, m \notin S$ gilt $\phi_n(u) = \phi_m(u)$.*

N *Nullspieler: Für alle $u \in U_N$ und alle $n \in N$ mit $u(S \cup \{n\}) = u(S)$ für alle $S \subseteq N$ mit $n \notin S$ gilt $\phi_n(u) = 0$.*

A *Additivität: Für alle $u, v \in U_N$ gilt $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$.*

Ein effizientes Lösungskonzept enthält die Annahme, dass die große Koalition N zusammenarbeiten wird und verteilt dementsprechend den Wert dieser Koalition unter den Spielern. Sind die Voraussetzungen von **S** hinsichtlich $u \in U$ sowie $n, m \in N$ erfüllt, so unterscheiden sich die Spieler n und m nur dem Namen nach in dem Spiel u. Ein symmetrisches Lösungskonzept geht mithin davon aus, dass alle wesentlichen Merkmale der Situation tatsächlich durch das Spiel u bereits modelliert sind. Ein Nullspieler trägt zu keiner Koalition etwas bei – die Eigenschaft **N** schließt in einem gewissen Sinn Solidarität der Spieler untereinander aus. Additivität ist schließlich eine inhaltlich schwer zu interpretierende Eigenschaft, die sich vor allem über ihre technischen Implikationen anbietet. Im speziellen lassen sich Ergebnisse der linearen Algebra beim Studium von additiven Lösungskonzepten einsetzen.

Man verifiziert durch scharfes Hinsehen, dass die egalitäre Lösung ϕ^{eg} effizient, symmetrisch und additiv ist, aber nicht **N** erfüllt.

Im Sinne der kooperativen Spieltheorie stellen sich nun zwei Fragen: (1) Existiert überhaupt ein Lösungskonzept, das die Eigenschaften **E**, **S**, **N**, und **A** erfüllt? (2) Falls ja, ist dieses Lösungskonzept eindeutig bestimmt und gibt es ggf. einen einfachen Algorithmus, mit dem die Auszahlungen der Spieler unter diesem Konzept berechnet werden können?

Satz 39 (Shapley 1953) *Sei N fixiert. Es gibt ein eindeutig bestimmtes Lösungskonzept ϕ^{Sh}, das die Eigenschaften **E**, **S**, **N**, und **A** erfüllt. Für alle $u \in U$ und alle $n \in N$ gilt*

$$\phi_n^{Sh}(u) = \frac{1}{|\Theta|} \sum_{\theta \in \Theta} \partial_n^\theta u,$$

wobei Θ die Menge der Bijektionen $N \to \{1, \ldots, |N|\}$ ist und

$$\partial_n^\theta u := u\left(\cup_{\substack{m \in N, \\ \theta(m) \leq \theta(n)}} \{m\}\right) - u\left(\cup_{\substack{m \in N, \\ \theta(m) < \theta(n)}} \{m\}\right).$$

Satz 39 beantwortet beide oben aufgeworfenen Fragen: Es gibt genau ein Lösungskonzept, das effizient, symmetrisch und additiv ist und Nullspieler stets die Auszahlung 0 zuordnet. Zu Ehren von Lloyd Shapley nennt man dieses Lösungskonzept ϕ^{Sh} den Shapley-Wert oder auch einfach nur den Wert.

Die Formel für den Shapley-Wert mag im ersten Moment etwas kompliziert aussehen, in Wirklichkeit ist der Shapley-Wert aber (in kleinen) Spielen recht einfach zu berechnen. Möchte man die Auszahlung für Spieler $n \in N$ im Spiel $u \in U_N$ bestimmen, so betrachte man jede Anordnung der Spieler $\theta \in \Theta$. Diejenigen Spieler, die vor Spieler n bereits 'da sind', erwirtschaften den Wert $u(\cup_{m \in N, \, \theta(m) < \theta(n)} \{m\})$. Zusammen mit Spieler n erwirtschaften sie also den Wert $u(\cup_{m \in N, \, \theta(m) \leq \theta(n)} \{m\})$. Die Differenz dieser beiden Größen ist der marginale Beitrag $\partial_n^\theta u$ von Spieler n im Spiel u unter der Anordnung θ. Der Shapley-Wert eines Spielers ist nun einfach sein durchschnittlicher marginaler Beitrag, wobei der Durchschnitt über alle Anordnungen gebildet wird.

Im Autospiel gibt es sechs mögliche Anordnungen der Spieler. Man kann sich die Berechnung der Shapley-Auszahlungen der Spieler erleichtern, indem man beachtet, dass der marginale Beitrag eines Spielers in einer Anordnung nicht von der genauen Anordnung der Spieler hinter ihm abhängt. Derart erklärt sich die Rechnung

$$\begin{aligned}
\phi_B(u) &= \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}900 + \frac{1}{2}200\right) + \frac{1}{3}900 = \frac{1450}{3}, \\
\phi_L(u) &= \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}900 + \frac{1}{2}0\right) + \frac{1}{3}700 = \frac{1150}{3}, \\
\phi_T(u) &= \underbrace{\frac{1}{3}}_{\theta(T)=1} 0 + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\theta(T)=2}\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\wedge\ \theta(B)=1} 200 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\wedge\ \theta(L)=1} 0\right) + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\theta(T)=3} 0 = \frac{100}{3}.
\end{aligned}$$

Wegen der Effizienz des Shapley-Wertes hätten wir eine der Auszahlungen auch leichter bestimmen können.

Anwendungen

Wir haben nun zwei interessante Konzepte aus der kooperativen Spieltheorie kennengelernt und am Beispiel des Shapley-Werts gesehen, welche Form die eingangs erwähnte Charakterisierung von 'Verteilungsregeln' typischerweise annimmt. In der Literatur werden nicht nur TU-Spiele betrachtet, sondern viele weitere Strukturen, in etwa TU-Spiele auf Graphen, NTU-Spiele oder Verhandlungsprobleme. Ferner gibt es für jede Struktur eine Vielzahl an Lösungskonzepten und für viele Lösungskonzepte mehrere Charakterisierungen. Durch derartige Grundlagenforschung ergeben sich gesicherte Erkenntnisse darüber, dass sich verschiedene Eigenschaften von Lösungskonzepten, wie etwa ein Moment der Solidarität zu beinhalten oder additiv zu sein, mehr oder weniger gut vereinbaren lassen oder sich sogar ausschließen. Dieses Wissen ist für viele realweltliche Verteilungsprobleme, für die eine Gesellschaft oder eine Gruppe eine vernünftige Lösung finden möchte, von hohem Interesse. Man denke etwa an die Ausgestaltung von Steuersystemen, an die Verteilung von Organen an Bedürftige, an die Zuweisung von Studienplätzen oder an die Regeln, mit denen ein Parlament aus den Stimmabgaben bei einer Wahl zusammengesetzt wird. Dies sind nur einige Beispiele für reale Verteilungsprobleme, bei denen Konzepte und Techniken der kooperativen Spieltheorie eingesetzt werden könnten und zum Teil auch eingesetzt werden. Wir erkennen also, dass die kooperative Spieltheorie insbesondere im Sinne einer Sozialtechnologie eine sehr fruchtbare formale Theorie in den Sozialwissenschaften ist.

Die kooperative Spieltheorie lässt sich darüberhinaus auch für die Erklärung und Vorhersage von sozialen Phänomenen einsetzen. Beispielsweise lässt sich der Kern bzw. ein enger Verwandter des Kerns dazu verwenden, zentrale Hypothesen der Clubtheorie formal abzuleiten, die sich mit der endogenen Formierung von Gruppen befassen. Ein kürzlich durchgeführtes Laborexperiment (Tutic 2013) zeigt, dass sich einige dieser Hypothesen empirisch bestätigen lassen. Ferner lassen sich im Labor Situationen einrichten, die gewissen Strukturen der kooperativen Spieltheorie (z.B. TU-Spielen) ähneln, um dann zu überprüfen, ob sich die Probanden auf eine Allokation verständigen, die von dem ein oder anderen Konzept der kooperativen Spieltheorie vorhergesagt werden. Tutic u. a. (2011) testen beispielsweise die Vorhersagen des Shapley-Werts, des kernnahen Nucleolus und zweier neuerer Konzepte, des Wiese-Werts (Wiese 2007) und des χ-Werts (Casajus 2009), an einem TU-Spiel, das einen Markt für diskrete Güter nachempfunden ist. Die neueren Lösungskonzepte implizieren, dass sich die Knappheitsverhältnisse auf dem Markt in den Verhandlungsergebnissen der Tauschpartner auf moderate Weise niederschlagen. Der marktradikale Nucleolus hingegen sagt voraus, dass die knappere Markseite alle Handelsgewinne vereinnahmen kann, dass also die Verhandlungen zweier Tauschpartner keinen eigenen Effekt auf die Verteilung der Kooperationsgewinne haben. Es zeigt sich, dass sich das Verhalten von unerfahrenen Spielern gut mithilfe der neueren Konzepte vorhersagen lässt, während das Verhalten von erfahreneren Spielern zunehmend von der Knappheitslogik des Marktes dominiert wird. Die kooperative Spieltheorie lässt sich also auch für die Zwecke von Erklärung und Vorhersage sozialer Phänomene einsetzen, auch wenn ihre grundlegenden Strukturen abstrakter sind und sich weniger direkt mit realweltlichen Vorgängen in Zusammenhang bringen lassen als es bei der nichtkooperativen Spieltheorie der Fall ist. Wie bei der nichtkooperativen Spieltheorie auch wird die Anwendbarkeit der kooperativen Spieltheorie mehr von den ihren Lösungskonzepten inhärenten Annahmen beschränkt als von ihren grundlegenden Strukturen selbst.

4 Literaturempfehlungen

In der englischsprachigen Literatur zur Entscheidungs- und Nutzentheorie stechen vor allem drei Bücher hervor. David M. Kreps (1988) 'Notes on the Theory of Choice' ist ein charmanter Klassiker. Das Lehrbuch 'Lecture Notes in Microeconomic Theory' von Ariel Rubinstein (2006) ist hervorragend geschrieben und vergleichsweise zugänglich. Wer sich dafür interessiert, wie sich die Nutzentheorie im Kontext der mathematischen Analysis entwickeln lässt, sei auf 'Real Analysis with Economic Applications' von Efe A. Ok (2007) verwiesen. Unsere Darstellung der Nutzentheorie ist an diesen drei Lehrbüchern angelehnt. Auch in deutscher Sprache gibt es gelungene Darstellungen der Entscheidungs- und Nutzentheorie, z.B. Eisenführ u. a. (2010) und Laux u. a. (2012).

Ein sehr gutes Lehrbuch zur Spieltheorie ist 'A Course in Game Theory' von Martin J. Osborne und Ariel Rubinstein (1994). Von den vielen auf eher informeller Ebene arbeitenden Einführungen in die Spieltheorie sei ausdrücklich Martin J. Osbornes (2003) 'An Introduction to Game Theory' empfohlen. Harald Wieses (2002) 'Entscheidungs- und Spieltheorie' ist eine gute deutschsprachige Einführung in die nichtkooperative Spieltheorie, auf die man vor allem dann zurückgreifen kann, wenn man sich bisher auf eher intuitiver Ebene mit der Theorie auseinandergesetzt hat, und nun den eigentlichen Formalismus kennenlernen möchte. Vom selben Autor (Wiese, 2005) stammt darüberhinaus eine lesenswerte und sehr zugängliche Einführung in die kooperative Spieltheorie. Auf diese Lehrbücher haben wir bei unserer Skizze der Spieltheorie zurückgegriffen.

Ein zugängliches Lehrbuch in deutscher Sprache, das u.a. sowohl die Nutzen- als auch die Spieltheorie behandelt, haben kürzlich Norman Braun und Thomas Gautschi (2011) vorgelegt.

Von den vielen Klassikern zur Nutzen- und Spieltheorie ist insbesondere 'Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations' von John C. Harsanyi (1977) auch heute noch lesenswert.

Um bei der mitunter anstrengenden Lektüre all dieser Bücher bei Laune zu bleiben, kann man schließlich noch Andreas Diekmanns (2009) 'Spieltheorie. Einführung, Beispiele, Experimente' lesen. Das Buch ist sehr unterhaltsam geschrieben, enthält eine Vielzahl an Anekdoten zur Spieltheorie und beschreibt einige interessante Anwendungen.

Literatur

[Berger und Hammer 2007] Berger, Roger ; Hammer, Rupert: Die doppelte Kontingenz von Elfmeterschüssen : Eine empirische Analyse. In: *Soziale Welt* 58 (2007), S. 397–418

[Braun und Gautschi 2011] Braun, Norman ; Gautschi, Thomas: *Rational-Choice-Theorie*. Weinheim : Juventa, 2011

[Casajus 2009] Casajus, André: Outside Options, Component Efficiency, and Stability. In: *Games and Economic Behavior* 65 (2009), S. 49–61

[Debreu 1954] Debreu, Gerard: Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function. In: Thrall, R. (Hrsg.) ; Coombs, C. (Hrsg.) ; Davis, R. (Hrsg.): *Decision Processes*. Wiley, 1954, Kap. 15

[Diekmann 1985] Diekmann, Andreas: Volunteer's Dilemma. In: *Journal of Conflict Resolution* 29 (1985), S. 605–610

[Diekmann 2009] Diekmann, Andreas: *Spieltheorie. Einführung, Beispiele, Experimente*. Hamburg : rororo, 2009

[Eisenführ u. a. 2010] Eisenführ, Franz ; Weber, Martin ; Langer, Thomas: *Raionales Entscheiden*. Berlin : Springer, 2010

[de Finetti 1931] Finetti, Bruno de: Sul Significato Soggettivo della Probabilita. In: *Fundamenta Mathematicae* 17 (1931), S. 298–329

[Gillies 1953] Gillies, Donald: *Some Theorems on N-Person Games*, Princeton University, Dissertation, 1953

[Gintis 2009] Gintis, Herbert: *The Bounds of Reason: Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences*. New York : Princeton University Press, 2009

[Güth u. a. 1982] Güth, Werner ; Schmittberger, Rolf ; Schwarze, Bernd: An Experimental Analysis of Ultimatum Bargaining. In: *Journal of Economic Behavior & Organization* 4 (1982), S. 367–388

[Harsanyi 1977] Harsanyi, John C.: *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations*. Cambridge : Cambridge University Press, 1977

[Hotelling 1929] Hotelling, Harold: Stability in Competion. In: *Economic Journal* 39 (1929), S. 41–57

[Kreps 1988] Kreps, David: *Notes on the Theory of Choice*. Boulder : Westview Press, 1988

[Kuhn 1950] Kuhn, Harold W.: Extensive Games. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36 (1950), S. 570–576

[Laux u. a. 2012] Laux, Helmut ; Gillenkirch, Robert ; Schenk-Mathes, Heike: *Entscheidungstheorie*. Berlin : Springer, 2012

[Myerson 1991] Myerson, Roger B.: *Game Theory. Analysis of Conflict*. Cambridge : Harvard University Press, 1991

[Nash 1950] Nash, John: Equilibrium Points in n-Person Games. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36 (1950), S. 48–49

[von Neumann und Morgenstern 1944] Neumann, John von ; Morgenstern, Oskar: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton : Princeton University Press, 1944

[Ok 2007] Ok, Efe A.: *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton : Princeton University Press, 2007

[Osborne 2003] Osborne, Martin J.: *An Introduction to Game Theory*. Oxford : Oxford University Press, 2003

[Osborne und Rubinstein 1994] Osborne, Martin J. ; Rubinstein, Ariel: *A Course in Game Theory*. Cambridge : MIT Press, 1994

[Rosenthal 1981] Rosenthal, Robert W.: Games of Perfect Information, Predatory Pricing and the Chain-Store Paradox. In: *Journal of Economic Theory* 25 (1981), S. 92–100

[Rubinstein 1996] Rubinstein, Ariel: *Economics and Language*. Cambridge : Cambridge University Press, 1996

[Rubinstein 2006] Rubinstein, Ariel: *Lecture Notes in Microeconomic Theory*. Princeton : Princeton University Press, 2006

[Samuelson 1938] Samuelson, Paul A.: A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour. In: *Economica* 5 (1938), S. 61–71

[Savage 1954] Savage, Leonard J.: *The Foundations of Statistics*. New York : Wiley, 1954

[Selten 1965] Selten, Reinhard: Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. In: *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 121 (1965), S. 301–324

[Shapley 1953] Shapley, Lloyd S.: A Value for N-Person Games. In: Kuhn, H. (Hrsg.) ; Tucker, A. W. (Hrsg.): *Contributions to the Theory of Games*. Princeton : Princeton University Press, 1953, S. 307–317

[Tutic 2013] Tutic, Andreas: Experimental Evidence on the Theory of Club Goods. In: *Rationality and Society* 25 (2013), S. 90–120

[Tutic u. a. 2011] Tutic, Andreas ; Pfau, Stefan ; Casajus, Andre: Experiments on Bilateral Bargaining in Markets. In: *Theory and Decision* 70 (2011), S. 529–546

[Wakker 2010] Wakker, Peter P.: *Prospect Theory: For Risk and Ambiguity*. Cambridge : Cambridge University Press, 2010

[Wiese 2002] Wiese, Harald: *Entscheidungs- und Spieltheorie*. Berlin : Springer, 2002

[Wiese 2005] Wiese, Harald: *Kooperative Spieltheorie*. München : Oldenbourg, 2005

[Wiese 2007] Wiese, Harald: Measuring the Power of Parties Within Government Coalitions. In: *International Game Theory Review* 9 (2007), S. 307–322